Quadriques affines et classes de similitudes dans $M_2(\mathbb{R})$

Exercices corrigés

d'après R. Mneimné [1]
présenté par Nicolas Prudhon

Introduction
Le but de cette série d'exercices est d'introduire l'étudiant à l'étude des quadriques par le biais de celle des classes de similitudes dans $M_2(\mathbb{R})$. On montrera au passage un certain nombre de propriétés géométriques remarquables des quadriques affines, quoique cela n'ait pas nécessairement de rapport avec les classes de similitudes.
Exercice 0. *Cas de la dimension* 3.

Etudier l'intersection d'un cône de $\mathbb{R}^3$ avec un plan affine.

Un cône de $\mathbb{R}^3$ est toujours le cône isotrope d'une forme quadratique non–dégénéreée de type $(2,1)$ ou $(1,2)$. L'intersection avec l'hyperplan vectoriel associé à l'hyperplan affine est une forme quadratique de $\mathbb{R}^2$ de type $(2,0)$ ou $(1,1)$ si elle est non–dégénérée et de type $(1,0)$ sinon. Ce dernier cas se produit si et seulement si le plan vectoriel est tangent au cône. Dans le premier cas nous obtenons une ellipse dans le deuxième une hyperbole et dans le troisième une parabole. □

1 Quadriques affines

Exercice 1.1. *Rappeler quelles sont à équivalence près les formes quadratiques non dégénérées sur* $\mathbb{R}^4$. *Identifier leurs cônes d'isotropie.*

Les formes quadratiques sont classifiées par leur rang et par leur signature. Les formes quadratiques non–dégénérées sur $\mathbb{R}^4$ sont donc de signature$(4,0)$, $(3,1)$, $(2,2)$, $(1,3)$, ou $(0,4)$. La première et la dernière sont définies et ont donc des cônes d'isotropie réduits à un point. Ces formes quadratiques ne nous intérsserons pas. En outre, la deuxième et la quatrième ont le même cône d'isotropie, appelé cône de Lorentz. Nous obtenons ainsi deux cônes dont les équations sont par exemple

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 0$$

□

Les quadriques affines sont par définition les sections de ces cônes par des hyperplans affines de $\mathbb{R}^4$. Une quadrique est dite non–dégénérée lorsque la restriction de la forme quadratique à l'hyperplan vectoriel associé à l'hyperplan affine est non–dégénérée. Les quadriques ont des propriétés bien différentes selon le type de cône dont on prend une section hyperplane. Pour comprendre les caractères distinctifs de ces deux cônes, on va identifier $\mathbb{R}^4$ avec $M_2(\mathbb{R})$. Les

Type du cône	Restriction à l'hyperplan vectoriel	Nom de la quadrique
$(2,2)$	$(2,1)$	hyperboloïde à une nappe
	$(1,1)$	paraboloïde hyperbolique
$(3,1)$	$(2,1)$	hyperboloïde à deux nappes
	$(3,0)$	éllipsoïde
	$(2,0)$	paraboloïde élliptique

FIG. 1 – Cônes et quadriques affines

cônes seront alors respectivement l'ensemble des matrices dont le carré est de trace nulle, et l'ensemble des matrices de déterminant nul. Avant de procéder à cette identification à la section suivante, apprenons à distinguer les différentes quadriques entre elles.

Exercice 1.2. *Classifier les quadriques affines en fonction des positions relatives de l'hyperplan et du cône associés à une quadrique.*

Les quadriques sont classifiées par le type du cône et la signature de la restriction de la forme quadratique à l'hyperplan vectoriel associé à l'hyperplan affine. En se basant sur les considérations suivantes :

1. lors de la restriction à un sous–espace vectoriel, les termes de la signature d'une forme quadratique décroissent (en effet, ces termes correspondent respectivement à la dimension maximale d'un sous–espace sur le quel la forme est définie positive, ou définie négative),
2. l'indice d'une forme quadratique, c'est–à–dire la dimension maximale d'un sous–espace totalement isotrope, diminue en restreignant la forme quadratique à un un–espace,

on voit aisément que seuls les cas apparaissant dans le tableau suivant se produisent.

□

Exercice 1.3. *Comment reconnaître rapidement une quadrique à son équation.*

Tout d'abord on homogénéise le polynôme non–homogène de la quadrique, en indroduisant une nouvelle variable, disons t. Nous obtenons alors l'équation du cône isotrope d'une forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$, non–dégénérée, et non–définie. Autrement dit, c'est l'équation de l'un de nos deux cônes. On détermine alors le type de ce cône. La quadrique de départ est donc l'intersection du cône obtenu avec l'hyperplan d'équation $t = 1$. L'hyperplan vectoriel parallèle est déquation $t = 0$. Il nous reste à déterminer le type du cône de la restriction de la forme quadratique à cet hyperplan. Or, l'équation de ce nouveau cône est obtenu à partir de l'équation de la quadrique en supprimant les termes non–homogènes. Les deux calculs à effectuer se font donc très rapidement. □

Exercice 1.4. *Donner un paramétrage de ces quadriques dans leur hyperplan et les représenter sur une figure en utilisant un programme comme* Maple. *Observer ces figures.* [1]

[1] Ceci fait partie de l'exercice !

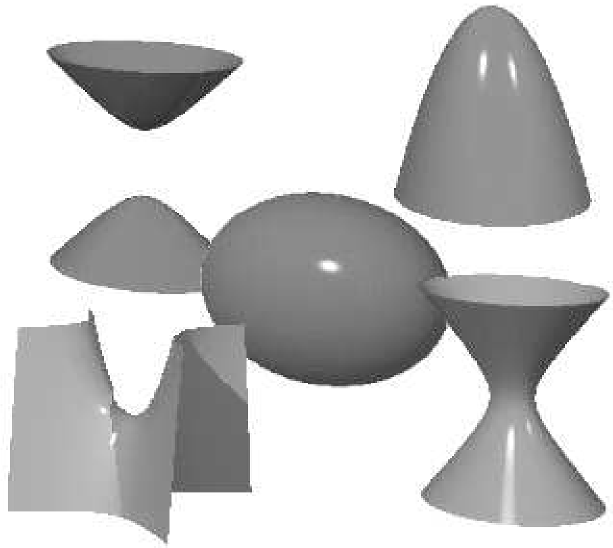

FIG. 2 – Les 5 quadriques.

Voir par exemple :

`www.math.uconn.edu/ hurley/math220/Maple_docs/QuadricSurfs1.html`.

2 Des cônes de $\mathbb{R}^4$ vus dans $M_2(\mathbb{R})$

Cette partie est consacrée à l'étude de propriétés géométriques des cônes de $\mathbb{R}^4$ obtenus dans la partie pécédente. Cette étude sera réalisée à travers l'identification de $\mathbb{R}^4$ avec $M_2(\mathbb{R})$ par l'isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\varphi \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ (a,b,c,d) & \mapsto & \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) . \end{array} \right.$$

Nous commençons par étudier le cône associé à une forme quadratique de signature $(2,2)$.

Exercice 2.1. *a) Montrer que l'application déterminant définit sur $M_n(\mathbb{R})$ une forme quadratique si et seulement si $n = 2$.*

b) Dans ce cas, montrer que cette forme quadratique q, donnée par

$$q\colon M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad et \quad q(A) = q\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc\,, \tag{1}$$

est non–dégénérée et de signature $(2,2)$.

c) Soit T la forme bilinéaire associée à q. Montrer que

$$T(A,B) = \frac{1}{2}\big(tr(A)tr(B) - tr(AB)\big)\,.$$

d) Montrer que le cône isotrope de q (ie. l'ensemble $\mathcal{C}(q) = \{A \in M_2(\mathbb{R})\,,\, q(A) = 0\}$), privé de 0, est l'ensemble des matrices de rang 1.

Comme une forme quadratique est homogène de degré 2, on doit avoir pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et si $A \mapsto \det(A)$ est une forme quadratique,

$$\lambda^2 \det(A) = \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A) .$$

Par conséquent, si le déterminant est une forme quadratique on a nécessairement $n = 2$. Réciproquement si $n = 2$, l'équation (1) est un polynôme homogène de degré 2 en a, b, c et d et q est donc bien une forme quadratique.

Il est classique que

$$2xy = \frac{1}{2}\big((x+y)^2 - (x-y)^2\big) .$$

et ceci montre que q est une forme quadratique non–dégénérée de type $(2, 2)$. Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ et $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. On a alors

$$\begin{array}{rcl} T(A,B) & = & \frac{1}{2}\big(\det(A+B) - \det(A) - \det(B)\big) \\ & = & \frac{1}{2}\big((a+e)(d+h) - (b+f)(c+g) - ad + bc - eh + gf\big) \\ & = & \frac{1}{2}\big(ah + ed - bg - cf\big) \\ & = & \frac{1}{2}\big((a+d)(e+h) - (ae + bg + cf + dh)\big) \\ & = & \frac{1}{2}\big(\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(AB) . \end{array}$$

Une matrice non–inversible est de rang 1 ou 0, le dernier cas ne pouvant se produire que pour la matrice nulle. Par conséquent, le cône isotrope de q privé de 0 est bien l'ensemble des matrices rang 1. □

Exercice 2.2. *On note $\langle , \rangle$ la forme bilinéaire sur $M_2(\mathbb{R})$ définie par $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^t)$. Montrer que l'on munit ainsi $M_2(\mathbb{R})$ d'un produit scalaire qui en fait un espace euclidien.*

Montrons que l'isomorphisme de $\mathbb{R}^4$ sur $M_2(\mathbb{R})$ qui à $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ associe la matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, envoie le produit euclidien habituel sur $\langle , \rangle$. C'est une simple vérification. Si φ est l'isomorphisme de $\mathbb{R}^4$ avec $M_2(\mathbb{R})$ précédent et $\langle , \rangle_{\mathbb{R}^4}$ le produit euclidien sur $\mathbb{R}^4$ il faut montrer que $\langle x, x\rangle_{\mathbb{R}^4} = \langle \phi(x), \phi(x)\rangle$ et nous avons en effet pour $x = (a, b, c, d)$,

$$\|x\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \mathrm{tr}(\phi(x)\phi(x)^t) = \langle \phi(x), \phi(x)\rangle .$$

□

Exercice 2.3. *a) Calculer les orthogonaux, pour ce produit scalaire, de la droite formée par les matrices scalaires et de la droite formée par les matrices antisymétriques.*

b) Montrer que la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ formée par les matrices élémentaires, plus précisement la base $\mathcal{B} = \big(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\big)$, est orthonormée pour ce produit scalaire et est située sur le cône isotrope de q.

c) Ecrire la matrice de la forme quadratique q dans cette base. Montrer que parmi les six plans de coordonnées, il y en a quatre qui sont contenus dans le cône isotrope de q.

d) Montrer qu'il existe des bases orthonormées pour le produit scalaire, telles que les matrices de q dans ces bases soient diagonales. Exhiber une telle base qui soit formée d'une matrice scalaire, d'une matrice antisymétrique et de deux matrices symétriques de trace nulle.

a) Si X est orthogonale à une matrice scalaire, alors $\mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}(I \cdot X^t) = 0$. Par conséquent, l'orthogonale des matrices scalaires est l'ensemble des matrices de trace nulle.

Remarquons que les matrices antisymétriques sont de la forme $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et forment donc bien une droite. Si $\langle X, A\rangle = \mathrm{tr}(XA^t) = 0$, avec $X = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, alors $x(b-c) = 0$. Par conséquent, l'orthogonale des matrices antisymétriques pour le produit scalaire est l'ensemble des matrices symétriques.

b) À travers l'isomorphisme φ, la base formée par les matrices élémentaires correspond à la base canonique de $\mathbb{R}^4$, qui est bien sûr orthonormée pour le produit euclidien usuel. Il est clair que ces matrices sont de rang 1 et sont donc des éléments de $\mathcal{C}(q)$.

c) La matrice de q dans cette base est

$$M_q = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les plans de coordonnées engendrés par les couples (E_{11}, E_{12}), (E_{11}, E_{21}), (E_{21}, E_{22}) et (E_{12}, E_{22}) sont contenus dans le cône isotrope, tandis que ceux engendrés par (E_{11}, E_{22}) et (E_{12}, E_{21}) ne le sont pas. On rencontrera les trois premiers plans dans l'exercice 2.4, tandis que la distinction entre les couples de génératrices engendrant un plan contenu dans le cône d'isotropie et les couples de génératrices engendrant un plan qui n'est pas contenu dans le cône appraraîtra dans la section 5.

d) Soit Q_t la matrice orthogonale

$$\begin{pmatrix} \cos t & 0 & 0 & -\sin t \\ 0 & \cos t & -\sin t & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t & 0 \\ \sin t & 0 & 0 & \cos t \end{pmatrix}$$

L'image de la base orthonormale formé des matrices élémentaires par cette matrice est encore orthonormale. Pour $t = \pi/4$, la matrice de q dans cette nouvelle base est diagonale. On peut prendre pour base $\left(I, \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$. Ce n'est autre que la base précédente à une permutation près. □

Exercice 2.4. *a) Soit X une matrice de rang* 1. *Montrer que X est semblable à $N = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ou bien à λP, avec $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, suivant que la trace de X est nulle ou pas.*

b) Soit A un point du cône isotrope de q. Montrer que l'espace tangent $\mathcal{T}_A$ en ce point au cône est donnée par le noyau de la différentielle de q au point A. En déduire que

$$\mathcal{T}_A = \{X \in M_2(\mathbb{R})\,,\ tr(AX) = tr(A)tr(X)\}\,.$$

c) Expliciter ces espaces tangents pour les points N et P. Pourquoi l'espace tangent au point λP est–il indépendant de λ ?

d) Montrer que l'espace tangent en un point quelconque X du cône $\mathcal{C}(q)$ distinct de l'origine rencontre ce cône suivant deux plans $P_1(X)$ et $P_2(X)$. Montrer que ces deux plans se coupent suivant la génératrice passant par X.

La question a) est des plus classiques et est laissée à l'étudiant qui ne l'aurait pas encore faite.

L'hyperplan tangent est l'hyperplan affine de direction le noyau de la différentielle dq_A de q en A, et passant par A. La différentielle de q en A est la forme linéaire

$$X \to 2\,T(X,A)\,.$$

En effet $q(X+A)-q(A) = 2\,T(X,A)+q(X)$, et $q(X) = O(\|X\|^2)$. En outre il est clair que A est dans le noyau de cette forme linéaire, ce qui répond au début de la question a) et à la fin de la question c). D'après une question précédente, on a $2\,T(A,X) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(X) - \mathrm{tr}(AX)$. Nous en déduisons que le noyau de la différentielle de q en A est $\mathcal{T}_A = \{X \in M_2(\mathbb{R})\,,\, \mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(X)\}\,.$

Dans le cas de N, une matrice X appartient á $\mathcal{T}_N$ si et seulement si $\mathrm{tr}(NX) = 0$. On trouve alors facilement que X est de la forme $X = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$. De même, un calcul facile indique qu'une matrice Y appartient à $\mathcal{T}_P$ lorsqu'elle est de la forme $Y = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

L'intersection de $\mathcal{T}_N$ avec $\mathcal{C}(q)$ est l'ensemble des matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ de déterminant nul. Autrement dit,

$$\mathcal{T}_N \cap \mathcal{C}(q) = \{X \in M_2(\mathbb{R})\,,\, X = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\} \cup \{X \in M_2(\mathbb{R})\,,\, X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\}\,.$$

De la même manière, nous obtenons

$$\mathcal{T}_P \cap \mathcal{C}(q) = \{X \in M_2(\mathbb{R})\,,\, X = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\} \cup \{X \in M_2(\mathbb{R})\,,\, X = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{smallmatrix}\right)\}\,.$$

Or, de manière générale, si $A = QBQ^{-1}$, alors

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}_A = \{X \in M_2(\mathbb{R})\,,\, \mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(X)\}\,,\\
&\mathcal{T}_A = \{X \in M_2(\mathbb{R})\,,\, \mathrm{tr}(QBQ^{-1}X) = \mathrm{tr}(B)\mathrm{tr}(X)\}\\
&\mathcal{T}_A = \{Y \in M_2(\mathbb{R})\,,\, QYQ^{-1} \in \mathcal{T}_B\}\\
&\mathcal{T}_A = Q^{-1}\mathcal{T}_B Q\,.
\end{aligned}$$

Comme N et P sont des représentants des deux classes de conjugaison dont l'intersection avec $\mathcal{C}(q)$ est non–vide, ceci permet de se ramener à ces deux cas. □

Nous passons maintenant à l'étude du cône d'une forme quadratique de type $(3,1)$. Les sections hyperplanes de ce cône seront l'éllipsoïde, l'hyperboloïde à deux nappes et le paraboloïde élliptique.

Exercice 2.5. *a) En identifiant* $\mathbb{R}^4$ *à* $M_2(\mathbb{R})$*, réaliser* l *sous la forme*

$$l(A) = l\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = \mathrm{tr}(A^2) = a^2 + d^2 + 2bc$$

Montrer que les formes l *et* q *ont des restrictions proportionnelles sur l'hyperplan* H_0 *des matrices de trace nulle. Plus précisémemt montrer que, si* $\mathrm{tr}(A) = 0$*, alors* $\mathrm{tr}(A^2) = -2\det(A)$*. Quel est le cône isotrope de cette restriction ?*

b) Le cône d'isotropie $\mathcal{C}(l)$ *de* l *rencontre l'hyperplan* H_S *des matrices symétriques en* $\{0\}$*. En déduire que* $\mathcal{C}(l) \setminus \{0\}$ *a deux composantes connexes.*

c) Déterminer l'ensemble des matrices A *telles que l'hyperplan*

$$H(A) = \{X \in M_2(\mathbb{R})\,, \mathrm{tr}(AX) = 0\}\,,$$

soit tangent au cône $\mathcal{C}(l)$*.*

a) Si $\mathrm{tr}(A) = 0$, on peut ecrire $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & -a \end{smallmatrix}\right)$ et $A^2 = \left(\begin{smallmatrix} a^2+bc & * \\ * & a^2+bc \end{smallmatrix}\right)$. Il vient donc

$$\mathrm{tr}(A^2) = 2(a^2 + bc) = -2\det(A)\,.$$

Ces restrictions ont alors le même cône isotrope dans l'hyperplan H_0 des matrices de trace nulle, qui est le cône des matrices nilpotentes. La signature de ce dernier est $(2, 1)$.

b) Si $X = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ est une matrice symétrique, alors la matrice X^2 est de la forme $\left(\begin{smallmatrix} a^2+b^2 & * \\ * & b^2+c^2 \end{smallmatrix}\right)$ et n'est donc pas de trace nulle, sauf si $X = 0$.

Si $A_0 = \left(\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right)$ et $A_1 = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{smallmatrix}\right)$ sont deux matrices non–symétriques telles que les nombres $b_i - c_i$, $(i = 0, 1)$, sont de signes opposés, alors tout chemin joignant A_0 et A_1 dans $M_2(\mathbb{R})$ intersecte l'hyperplan des matrices symétriques. En effet la forme linéaire sur $M_2(\mathbb{R})$ définie par

$$\begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) & \mapsto & b - c \end{array}$$

est continue, son noyau est H_S et l'image du chemin change de signe. Elle contient donc 0 par le théorème des valeurs intermédiaires. Si un tel chemin est contenu dans le cône de l, alors il passe donc nécessairement par 0. Le cône $\mathcal{C}(l)$ possède donc au moins deux composantes connexes. De plus, si les nombres $b_i - c_i$, $(i = 0, 1)$, sont de même signe on peut les joindre par exemple de la façon suivante. L'hyperplan affine $H_S(A_0)$ parallèle aux matrices symétriques et passant par A_0 rencontre la génératrice passant par A_1 en un point B. On peut alors joindre dans le cône A_0 et B par un chemin dans l'ellipsoïde $H_S(A_0) \cap \mathcal{C}(q)$ qui est connexe, puis B et A_1 par un segment le long de la génératrice. En conclusion, $\mathcal{C}(q) \setminus \{0\}$ possède exactement deux composantes connexes.

c) La forme bilinéaire associée à l est

$$B_l(X, Y) = \frac{1}{2}\big(\mathrm{tr}((X + Y)^2) - \mathrm{tr}(X^2) - \mathrm{tr}(Y^2)\big) = \mathrm{tr}(XY)\,.$$

L'hyperplan $H(A)$ est donc l'hyperplan polaire de la droite vectorielle de $M_2(\mathbb{R})$ passant par A. Cet hyperplan est donc tangent au cône si et seulement si $A \in \mathcal{C}(l)$, autrement dit $\mathrm{tr}(A^2) = 0$.
$\square$

3 Premiers exemples

Exercice 3.1. *Montrer que l'hyperplan vectoriel H_0 formé par les matrices de trace nulle n'est pas tangent au cône $\mathcal{C}(q)$. Montrer qu'il en est de même de l'hyperplan H_S des matrices symétriques.*

Nous avons vu que les hyperplans tangents à $\mathcal{C}(q)$ rencontrait ce cône en un plan. Il suffit donc de montrer que l'intersection entre H_0 (resp. H_S) et $\mathcal{C}(q)$ n'est pas un plan. Tout d'abord l'intersection de H_0 et $\mathcal{C}(q)$ est l'ensemble des matrices nilpotentes, c'est à dire l'ensemble des matrices de la forme $X = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & -a \end{smallmatrix}\right)$ telles que $a^2 + bc = 0$. Ceci n'est pas la réunion de deux plans. Pour le cas de H_S, les matrices symétriques de déterminant nul sont celles de la forme $X = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ et vérifiant $ac - b^2 = 0$, et ce n'est pas non–plus une réunion de deux plans. $\square$

Exercice 3.2. *Montrer que l'intersection de ces hyperplans avec $\mathcal{C}(q)$ est un cône de l'espace à trois dimensions.*

Cela résulte immédiatement dans les deux cas de lidentité

$$\frac{1}{4}\left((x+y)^2-(x-y)^2\right).$$

$\square$

Exercice 3.3. *a) Montrer que l'intersection de $\mathcal{C}(q)$ avec chacun des deux hyperplans affines parallèlles respectivement à H_0 et à H_S et passant par le point $N+P=\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ est un hyperboloïde à une nappe.*

b) Montrer que l'intersection de $\mathcal{C}(q)$ avec l'hyperplan affine constitué des matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&1\end{smallmatrix}\right)$ est un paraboloïde hyperbolique. Remarquer que l'espace vectoriel associé à cet hyperplan affine est bien tangent à notre cône.

a) Comme les hyperplans H_0 et H_S ne sont pas tangents au cône, la restriction de q à ces hyperplans est non–dégénérée, et la quadrique cherchée est une hyperbooïde à une nappe.

b) Tout d'abord les matrices de la forme ci–dessus forment bien un hyperplan affine : c'est celui d'hyperplan directeur l'ensemble des matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&0\end{smallmatrix}\right)$ et contenant la matrice identité. Cet hyperplan directeur est quant à lui l'hyperplan tangent au cône au point P. Comme l'hyperplan affine en question ne passe pas par l'origine, il en résulte que l'intersection est un paraboloïde à une nappe. $\square$

Exercice 3.4. *a) Déterminer la nature des ensembles suivants :*

1. *l'ensemble des matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix}x&1+y\\y&z\end{smallmatrix}\right)$ et dont le carré est de trace nulle.*
2. *l'ensemble des matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix}1+x&y\\z&-x\end{smallmatrix}\right)$ et dont le carré est de trace nulle.*

b) Montrer que si $\operatorname{tr}(A^2)=0$, l'ensemble des matrices X telles que $\operatorname{tr}(AX)=1$ et $\operatorname{tr}(X^2)=0$ est un paraboloïde à une nappe.

a) On trouve bien sûr un ellipsoïde, puis un hyperboloïde à deux nappes.

b) Les matrices X vérifiant $\operatorname{tr}(AX)=1$ et forment un hyperplan affine de $M_2(\mathbb{R})$ parallèle à l'hyperplan tangent au coñe $\mathcal{C}(l)$ en A et ne passant pas par 0. (En effet, si X et Y sont dans cet ensemble, alors $\operatorname{tr}(A(X-Y))=1-1=0$, il s'agit donc bien d'un hyperplan affine). L'ensemble cherché est donc l'intersection de cet hyperplan affine avec le cône $\mathcal{C}(l)$. Comme l'hyperplan linéaire est tangent au cône, on trouve un paraboloïde élliptique. $\square$

Question subsidiaire : ce paraboloïde est contenu dans une seule des deux composantes connexes de $\mathcal{C}(l)$. Est-ce la même que celle contenant A ? Il suffit de trouver un point contenu dans le paraboloïde et d'identifier sa composante connexe. Un tel point est par exemple $(b-c)^{-2}A^t$, où $A=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$. Or, ce point est un multiple positif de A^t qui est le symétrique orthogonal (relativement à l) de A par rapport à H_S, et n'est donc pas dans la même composante connexe que A.

4 Classes de similitudes

Exercice 4.1. *Soient α et β deux nombres réels distincts. Montrer que la classe de similitude des matrices ayant α et β comme valeurs propres est une quadrique à centre dont on déterminera la nature.*

Tout d'abord, remarquons que les matrices ayant α et β comme valeurs propres forment bien une classe de similitude dans $M_2(\mathbb{R})$, car α et β sont distincts : c'est la classe de conjugaison de la matrice $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{smallmatrix}\right)$. En opérant la translation de vecteurs $-\beta I$ sur cet ensemble on obtient donc la classe de similitude [2] de la matrice $\left(\begin{smallmatrix}\alpha-\beta & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$.

Commençons par déterminer cette classe de similitude. Il s'agit de l'intersection de l'ensemble des matrices dont la trace vaut $\alpha-\beta$ (qui est l'hyperplan affine de plan directeur H_0 et passant par $(\alpha-\beta)I$) et dont le déterminant est nul : c'est donc l'intersection d'un hyperplan affine non–tangent au cône ne passant pas par l'origine, et du cône $\mathcal{C}(q)$. On trouve donc une hyperboloïde à une nappe. L'assertion sur le centre utilise un cas particulier du résultat suivant, valable en toute dimemsion.

Proposition. *Soient k une forme quadratique non–dégénérée et $\mathcal{A}$ un hyperplan affine parallèle à $\mathcal{A}_0$ dans un espace vectoriel réel de dimension finie. Supposons que la restriction de k à $\mathcal{A}_0$ est non–dégénérée. Alors l'intersection de $\mathcal{A}$ avec le cône d'isotropie de q est une quadrique à centre. Celui–ci est donné par l'intersection de $\mathcal{A}$ avec la droite polaire de $\mathcal{A}_0$.*

Démonstration. Cette intersection est bien un point car $\mathcal{A}$ n'est pas tangent au cône d'isotropie de k. Soit C ce point. On a donc

$$\mathcal{A} = C + \mathcal{A}_0\,.$$

Soit M un point de la quadrique, et M^* son symétrique par rapport à C. Si A et B sont des matrices, notons $\overrightarrow{AB}$ la matrice $B-A$. Nous avons $\overrightarrow{CM^*} = -\overrightarrow{CM}$ par définition de C, et donc nous obtenons

$$k(\overrightarrow{OM^*}) = k(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{CM}) = k(\overrightarrow{OC})+k(\overrightarrow{CM}) = k(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}) = 0\,,$$

car, en notant B_k la forme bilinéaire associée à k, on a $B_k(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{CM}) = 0$. Ainsi le point M^* appartient à la quadrique. □

Cette proposition nous indique que le centre de l'hyperboloïde à une nappe donné par la classe de similitude de $\left(\begin{smallmatrix}\alpha-\beta & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$ est le point $1/2(\alpha-\beta)I$. En revenant à la classe de similitude des matrices dont les valeurs propres sont α et β, mous trouvons donc une hyperboloïde à une nappe dont le centre est $1/2(\alpha+\beta)I$. □

Exercice 4.2. *Montrer que la classe de similitude de N est l'ensemble des matrices nilpotentes non–nulles, et que cet ensemble s'identifie à un cône de $\mathbb{R}^3$ auquel on a enlevé un sommmet. (En particulier, il a deux composantes connexes.)*

Le fait que la classe de similitude de N est l'ensemble des matrices nilpotentes non–nulles a déjà été rencontré. Cette ensemble est exactement celui des matrices non–nulles dont la trace et le déterminant s'annulent. Il s'agit donc de l'intersection de H_0 et de $\mathcal{C}(q)$. D'autre part, nous avons vu que la retriction de q à H_0 est non–dégénérée de type $(2,1)$. □

Exercice 4.3. *Déterminer la nature de la classe de similitude des matrices de trace nulle et de déterminant $\Lambda = \lambda^2 > 0$.*

Il s'agit bien d'une seule classe de conjugaison. En effet, les valeurs propres d'une telle matrice X sont $\pm i\lambda$ et les vecteurs propres complexes sont conjugués. Plus précisement si v

[2] En translatant une classe de similitude, on obtient encore une classe de similitude, c'est justement l'intérêt de cette série d'exercices

est un vecteur propre (complexe) pour $i\lambda$, alors $\overline{v}$ est un vecteur propre pour $-i\lambda$. On en déduit que la matrice de l'endomorphisme associé à X, dans la base (réelle) $\big(v+\overline{v}, i(v-\overline{v})\big)$, est $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Autrement dit la matrice X est conjuguée à cette matrice dans $M_2(\mathbb{R})$.

Écrivons $X = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & -a \end{smallmatrix}\right)$. Alors nous avons $a^2 + bc = -\lambda^2$. Cette classe de similitude est donc un hyperboloïde à deux nappes. En effet, en homogénéisant, on obtient l'équation

$$a^2 + bc + \lambda^2 t^2 = 0\,,$$

le cône d'isotropie d'une forme quadratique de type $(3,1)$, dont l'intersection avec l'hyperplan $t = 0$ est le cône d'une forme non–dégénérée (de type $(2,1)$). □

Exercice 4.4. *Déterminer la nature des classes de similitude de $M_2(\mathbb{R})$.*

Si une matrice X possède deux valeurs propres distinctes rélles, ou imaginaires pures, la nature de la classe de similitude de X a déjà été étudiée. Si X n'a qu'une seule valeur propre, qui est donc réelle, elle est semblable soit à une matrice scalaire (et X EST cette matrice scalaire) soit à la matrice $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$. Dans le premier cas la classe de similitude est donc réduite à un point, et dans le second cette classe est obtenue par translation du coñe nilpotent. Il reste donc à étudier la classe de similitude d'une matrice X dont les valeurs propres sont complexes (conjuguées et non–rélles).

Appelons $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$ l'une de ces valeurs propres. Ce dernier cas est résolu comme suit. Puisque les valeurs propres sont conjuguées, la matrice $X - \lambda_R$ a des valeurs propres imaginaires pures. La classe de similitude de X est donc translatée de la classe de similitude des matrices de trace nulle et de déterminant λ_I^2, qui est une hyperboloïde à deux nappes. □

5 Quadriques contenant des droites

Exercice 5.1. *a) Montrer que les deux plans $P_1(X)$ et $P_2(X)$ associés à un point $X \in \mathcal{C}(q)$ sont les ensembles formés respectivement des matrices ayant même noyau et même image que X.*

b) On appelle plan générateur du cône $\mathcal{C}(q)$ tout plan contenu dans $\mathcal{C}(q)$. Les couples de deux génératrices distinctes se répartissent donc en deux familles : les couples pour les quels les deux génératrices sont contenus dans un même plan génerateur, et les couples tels que le plan contenant ces deux génératrices n'est pas contenu dans le cône $\mathcal{C}(q)$.

1. *Montrer que deux matrices de rang 1 ayant même noyau et même image sont proportionnelles.*
2. *Montrer que deux plans générateurs de la forme $P_1(X)$ et $P_1(Y)$ sont identiques ou transverses, selon que les droites noyaux de X et de Y sont identiques ou non.*
3. *Montrer que deux plans générateurs de la forme $P_1(X)$ et $P_2(Y)$ se coupent toujours selon une génératrice du cône $\mathcal{C}(q)$.*
4. *À chaque génératrice du cône on peut associer deux droites D_1 et D_2 correspondant au noyau et à l'image des matrices appartenant à la génératrice. Montrer que ces droites sont égales ou distinctes suivant que les matrices de la génératrice sont nilpotentes ou pas.*
5. *Montrer que les applications $X \mapsto X^t$ et $X \mapsto X - \mathrm{tr}(X)I$ définissent des involutions du cône $\mathcal{C}(q)$.*

c) On dit qu'une partie F d'un espace affine est flexé, si pour tous points A et B de cette partie il existe un point C tels que les segements $[A, C]$ et $[C, B]$ soient contenus dans F. Montrer que le cône $\mathcal{C}(q)$ est flexé.

a) Rappelons que si $X \in \mathcal{C}(q)$, l'hyperplan tangent en X au cône intersecte ce cône en la réunion de deux plans qui sont ainsi associés à X. Le même argument que celui utilisé à la fin de l'exercice 2.4, combiné avec le fait que si A a même noyau (resp. image) que $X = PYP^{-1}$, alors PAP^{-1} a même noyau (resp. image) que Y, montre que l'on peut se ramener au cas des matrices N et P.

Dans le cas de $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, nous avons

$$\mathcal{T}_P \cap \mathcal{C}(q) = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \,,\, X = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\} \cup \{X \in M_2(\mathbb{R}) \,,\, X = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{smallmatrix}\right)\} \,,$$

et le premier de ces plans (ie. les matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$) est l'ensemble des opérateurs ayant même image que P, tandis que le deuxième (ie. les matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{smallmatrix}\right)$) est l'ensemble des opérateurs ayant même noyau que P.

Pour trouver les plans associées à $N = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, rappelons que

$$\mathcal{T}_N \cap \mathcal{C}(q) = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \,,\, X = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\} \cup \{X \in M_2(\mathbb{R}) \,,\, X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\} \,.$$

Le premier de ces plans (ie. les matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$) est l'ensemble des opérateurs ayant même image que N, et le deuxième (ie. les matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$) est l'ensemble des opérateurs ayant même noyau que N. $\square$

b) La première question est laissée à la sagacité de l'étudiant.

Il est clair que si les noyaux de X et Y sont les mêmes, les plans sont identiques, et réciproquement. Il reste donc à montrer que lorsque les noyaux sont distincts les plans sont transverses. Si cela était faux, les plans se couperaient selon une droite. Un point sur une telle droite serait donc une matrice ayant même noyau que X et Y à la fois, ce qui est absurde.

Si $P_1(X)$ et $P_2(Y)$ sont égaux, la question est évidente. Sinon, soit v_1 dans le noyau de X et v_2 dans l'image de Y. Alors (v_2, v_1) est une base de $\mathbb{R}^2$, et l'opérateur ayant pour matrice P dans cette base est dans l'intersection de $P_1(X)$ et $P_2(Y)$. Cette intersection est donc une droite, et il est clair que celle–ci contient l'origine : c'est donc bien une génératrice du cône.

La question 4 est un grand classique.

Pour la question 5 remarquons que la première transformation (la transposition) est la symétrie othogonale par rapport à l'hyperplan formé par les matrices symétriques, l'orthogonalité étant relative à la structure euclidienne de $M_2(\mathbb{R})$ définie plus haut. Ce fait est facilement vérifié en utilisant l'exercice 2.3. De même, la transformation $X \mapsto X - \mathrm{tr}(X)$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan H_0 des matrices de trace nulle. Ces applications sont donc des involutions de $M_2(\mathbb{R})$. Ces involutions laissent stables le cône car les polaires de ces hyperplans par rapport à q sont exactement leurs orthogonaux pour la structure euclidienne. (On peut aussi le voir par un calcul direct).

Soit $X \in \mathcal{C}(q)$ non–nilpotente (la réponse étant claire pour les matrices nilpotentes puisqu'il n'y a qu'une seule droite à considérer). La réunion des plans $P_1(X)$ et $P_2(X)$ associés à X se transforment en la réunion des plans associés à l'image de X. Notons f une des deux involutions. Il s'agit de déterminer si $P_1(f(X))$ est égale à $f(P_1(X))$ ou à $f(P_2(X))$. Comme les hyperplans H_0 et H_S ne contiennent pas de plans générateurs du cône $\mathcal{C}(q)$, le cas $f(P_1(X)) = P_1(f(X))$ ne peut se produire que si l'orthogonal dans $P_1(X)$ de l'intersection entre l'hyperplan et $P_1(X)$ (qui est une droite) est l'ensemble

1. des matrices anti–symétriques dans le cas de la tranformation $X \mapsto X^t$,
2. des matrices scalaires, dans le cas de la transformation $X \mapsto X - \mathrm{tr}(X)$.

Or, ces droites ne peuvent être contenus dans $P_1(X)$ car elle le serait alors dans $\mathcal{C}(q)$. Il en résulte que dans les deux cas, la transformation échange les plans P_1 et P_2 associés à X et $f(X)$, donc les droites de $\mathbb{R}^2$ correspondant à leurs noyaux et images respectives. [3]

Distinguons deux cas, selon que les génératrices de passant par les points A et B sont dans un même plan générateur ou pas. Dans le premier cas la réponse est évidente. Dans le deuxième cas, considérons les plans P_1 et P_2 associés à A et B. Ces plans se coupent en donnant deux nouvelles génératrices. On conclut alors immédiatement.

Exercice 5.2. *a) Montrer qu'un hyperplan linéaire de* $\mathbb{R}^4$ *qui contient un plan générateur de* $\mathcal{C}(q)$ *est nécessairement tangent au cône. En déduire que les plans situés sur une même droite posée sur un hyperboloïde à une nappe sont tous tangents à cette hyperboloïde.*

b) Montrer que les seules quadriques non–dégénérées qui contiennent des droites sont précisément les sections hyperplanes du cône $\mathcal{C}(q)$. *Montrer que ces quadriques sont flexées.*

La restriction de q à l'hyperplan linéaire en question est une forme quadratique en trois variables, et dont l'indice est moins 2 car elle contient un plan totalement isotrope. Elle est donc dégénérée : en effet, une forme quadratique en trois variables non–dégénérée est d'indice au plus 1. Un élément X de son noyau est sur le cône $\mathcal{C}(q)$, et son orthogonal pour q, qui est tangent au cône contient notre hyperplan initial, et lui est donc égal. L'assertion à déduire est alors immédiate.

Tout d'abord, les sections hyperplanes du cône $\mathcal{C}(q)$ contiennent bien des droites. En effet, le plan tangent à une telle quadrique en un point $X \in \mathcal{C}(q)$ est l'intersection de l'hyperplan affine et de l'hyperplan tangent en X à $\mathcal{C}(q)$. Cet hyperplan rencontre $\mathcal{C}(q)$ selon deux plans, qui rencontrent l'hyperplan affine selon deux droites contenant X. Ces deux droites sont contenus dans la quadrique (et engendrent le plan tangent). Ces quadriques sont flexés d'après l'exercice précédent.

En outre, si une quadrique non–dégénérée contient une droite, celle–ci est contenu dans le cône d'isotropie de la forme quadratique et dans l'hyperplan affine. Les génératrices passant par cette droite forment donc un plan contenu dans le cône. Or un cône de type $(3, 1)$ ne contient pas de plan. □

Références

[1] Rached Mneimné. *Éléments de géométrie. Actions de groupes.* Nouvelle bibliothèque mathématique. Paris : Cassini. (1997)

[2] Michèle Audin, *Géométrie.* Paris : Belin. (1998)

[3] On peut remplacer ce raisonnement par un calcul, voir pour cela l'indication donné par Mneimné [1, page 221]. Cependant je trouve que l'avantage de ce raisonnement est de s'appliquer aux transformations obtenues par symétries orthogonales par rapport à des hyperplans dont la polaire est l'orthogonal. On peut d'ailleurs prendre n'importe quel hyperplan non–tangent au cône et la symétrie dans la direction de sa polaire. *Question subsidiaire :* que se passe-t-il lorsque l'hyperplan est tangent au cône ?