Université de Lorraine
Département de Mathématiques, S4

Année universitaire 2013-2014

Examen final d'Analyse
Durée 3h
Jeudi 12 Juin 2014

Les parties I et II devront être rédigées sur des copies séparées

Toute assertion devra être soigneusement justifiée. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction. Aucun document ni calculatrice autorisé.

– Partie I –

Exercice I.0. (Questions de cours)

1) Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions, définie sur I. Montrer que si la série converge uniformément sur I, alors $\lim_{n\to\infty} \sup_I |f_n(x)| = 0$.
2) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$.
3) Exprimer $g(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{2^n x^n}{n}$ en fonction usuelle et préciser l'intervalle de validité.

Exercice I.1.

Soit $u_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que la suite de fonctions u_n converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Tracer la fonction limite $v(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
2) Est ce que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$?

Exercice I.2.

Considérons l'équation différentielle $y'' + 2xy' + 2y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Supposons que nous avons une solution en série entière $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ avec un rayon de convergence non nul.

1) Montrer que $a_2 = -1$ et que $a_{n+2} = \frac{-2}{(n+2)} a_n$ pour $n \geq 1$.
2) Donner l'expression de a_n selon la parité de n.
3) Déterminer le rayon de convergence de la série obtenue.
4) Exprimer la fonction y sous forme de fonction usuelle. Déterminer $y^{(2014)}(0)$.

Exercice I.3.

Nous allons étudier la série de fonctions $f(x) = \sum_{n\geq 0} u_n(x)$ avec $u_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

1) Montrer que f est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
2) Est ce que la convergence est uniforme sur $]-1, 1[$?
3) Montrer que la série converge normalement sur $[-a, a]$ pour tout $0 < a < 1$. En déduire que f est continue sur $]-1, 1[$.
4) Montrer que pour $0 < a < 1$, on a $|u_n'(x)| \leq 2na^{n-1}$ si $|x| \leq a$.
5) En déduire que f est de classe C^1 sur $]-1, 1[$ et que f est croissante sur $[0, 1[$.
6) Exprimer $f(1/x)$ en fonction de $f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$, en déduire que f est C^1 sur $\mathcal{D}$.
7) Montrer que $\forall\, x \in [0, 1[$, on a $\frac{1}{2(1-x)} \leq f(x) \leq \frac{1}{1-x}$, en déduire $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.
8) A l'aide de 6), déterminer $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Esquisser le graphe de la f sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$.

– Partie II –

Exercice II.1

Soit $E_{a,b} :\ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\, ;\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ une éllipse.

1) Calculer l'aire de l'éllipse au moyen d'un changement de variables dans une intégrale double.
2) Calculer l'aire de l'éllipse en utilisant le théorème de Green-Riemann.

Exercice II.2

Calculer l'intégrale curviligne suivante :

$$\int_\Gamma \frac{(x + y)dz + (y + z)dx + dy}{x^2 + z^2}\, ,$$

où Γ est le segment qui relie les points $M_1 = (1, 1, 1)$ et $M_2 = (2, 2, 2)$