L2 Mathématiques
Contrôle continu : Analyse 3

Auteur du sujet : Nicolas Prudhon

24 mars 2014
Durée : 2h

Les documents et le matériel électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 *Répopndre par VRAI ou FAUX en justifiant votre réponse.*

1. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction. Si les fonctions* $f_1\colon x \mapsto f(x,0)$ *et* $f_2\colon y \mapsto f(0,y)$ *sont continues en* 0*, alors* f *est continue en* $(0,0)$*.*
2. Soit f *définie sur un ouvert* D *de* $\mathbb{R}^n$*. Si* f *admet des dérivées partielles en* $a \in D$*, alors* f *est continue en* a*.*
3. Soit f *une fonction sur* $\mathbb{R}^2$*. Si* f *est dérivable en* $(0,0)$*, alors* f *possède des dérivées directionnelles* $f'_h(0,0,)$ *en* $(0,0)$ *pour tout* $h \in \mathbb{R}^2$*, et l'application* $h \mapsto f'_h(0,0)$ *est linéaire.*
4. Si f *est différentiable sur* $\mathbb{R}^2$ *et* $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ *sur* $\mathbb{R}^2$*, alors* f *ne dépend que de* y *sur* $\mathbb{R}^2$*.*
5. Soit f *définie sur un ouvert* D *de* $\mathbb{R}^n$*. Si* $a \in D$ *est un point tel que* $D_a f = 0$*, alors* f *admet un extremum local en* a*.*
6. L'intégrale d'une forme différentielle de degré 1 *le long d'un chemin* γ*, ne dépend que de l'image de* γ*.*

Exercice 2
1. Si $(x,y) = \varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$*, et* f, g *sont deux fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$*, telles que* $g = f \circ \varphi$*, exprimer les dérivées partielles de* f *en fonction de celles de* g*.*
2. En passant en coordonnées polaires, déterminer toutes les fonctions

$$f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

de classe $\mathcal{C}^1$*, solutions de l'équation*

$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y)$$

Exercice 3
1. En utilisant un changement de variables affine, par exemple, montrer que l'aire d'un triangle ABC du plan vaut

$$\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2}\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right).$$

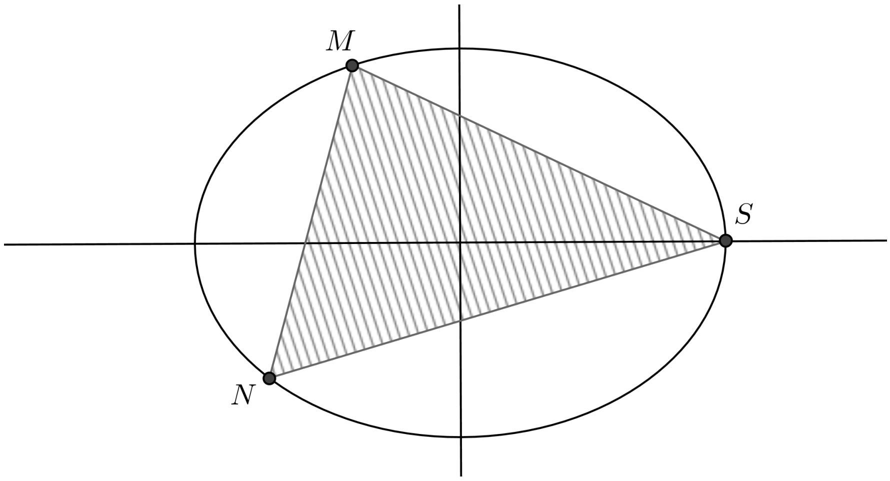
2. Soit $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 \leq u \leq v \leq 2\pi$. Déterminer les extrema globaux de la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & \sin v - \sin u - \sin(u-v)\,. \end{array}$$

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. On considère l'éllipse $\mathcal{E}$ d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Soient $S = (a, 0)$ et M, N deux points de $\mathcal{E}$. À l'aide des questions 1. et 2., déterminer les points M et N pour que l'aire du triangle SMN soit maximale.



Exercice 4 *Caculer*

$$\oint_\Gamma \frac{xdy + ydx}{x^2 + y^2}$$

où Γ est le quart du cercle unité qui va de $(1;0)$ à $(0;1)$, parcouru dans le sens trigonométrique.