Cours d'Analyse 3

– Partie II –
Fonctions de plusieurs variables

Dernière compilation le 21 mars 2016

Table des matières

1 Dérivation des fonctions de plusieurs variables **5**

1.1 Domaines, Images et graphes 5

1.2 Limites et continuité 6

1.3 Dérivées partielles et directionnelles 7

1.4 La Différentielle 8

1.4.1 Définition 8

1.4.2 Propriétés élémentaires 8

1.4.3 Lien avec les dérivées partielles 8

1.5 Dérivée d'une fonction composée 8

1.5.1 La formule 8

1.5.2 Exemples de changement de variables 9

1.6 Inégalités des accroissements finis 9

1.6.1 Cas des fonctions réelles 9

1.6.2 Cas général 9

1.7 Notion de difféomorphisme 9

1.8 Dérivées d'ordre supérieur 9

1.8.1 Théorème de Schwarz 9

1.8.2 Recherche d'extremum 10

2 Intégration des fonctions réelles de plusieurs variables **11**

2.1 L'intégrale de Riemann 11

2.1.1 Ensembles quarrables 11

2.1.2 Théorème de Fubini 11

2.1.3 Changements de variables 13

2.2 Intégrales curvilignes 14

2.2.1 Arcs paramétrés 14

2.2.2 Intégrales curvilignes 15

2.2.3 Formule de Green-Riemann 16

Principales notations et conventions

i $\mathbb{R}$: corps des nombres réels. L'espace $\mathbb{R}^n$ sera vu tantôt comme espace vectoriel (les éléments sont alors appelés des vecteurs), tantôt comme espace affines (les éléments sont alors appelés points). Toutes les coordonnées sont considérées dans la base canonique.

ii $x = (x_1, \ldots, x_n)$: coordonnées d'un point $x \in \mathbb{R}^n$.

iii

$$\overrightarrow{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} :$$

coordonnées du vecteur $\overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^n$. On écrit souvent h au lieu de $\overrightarrow{h}$.

iv $y - x$: si x et y sont des points, $y - x$ désigne le vecteur de coordonnées

$$\overrightarrow{xy} = y - x = \begin{bmatrix} y_1 - x_1 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{bmatrix}$$

v $A(h), A \cdot h = Ah$: image de h par l'application linéaire A, produit de la matrice A par la matrice colonne h. En général une application linéaire est identifiée à sa matrice dans la base canonique, et les deux notations sont donc utilisées indifféremment.

vi $D_x f$: application linéaire tangente (dite aussi différentielle ou dérivée) de la fonction f au point x.

vii $D_x f(h)$: image du vecteur h par la dérivée de f au point x.

viii $\|h\|$, $\|b - a\|$: norme des vecteurs h et $b - a$.

ix $o(\|h\|^2)$: notation de Landau. Désigne une fonction g dont la variable est un vecteur h de $\mathbb{R}^n$, définie au voisinage de 0, telle que

$$\lim_{h \to 0} \frac{|g(h)|}{\|h\|^2} = 0$$

Idem pour $o(\|h\|)$, $o(\|h\|^3)$, ...

Chapitre 1

Dérivation des fonctions de plusieurs variables

1.1 Domaines, Images et graphes

Définition 1.1.1. *Une fonction de plusieurs variables est une fonction*

$$f\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^q$$

avec

- *Le domaine $\mathcal{D}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^p$, ainsi si $x \in \mathcal{D}$ alors $x = (x_1, \dots, x_p)$;*
- *L'image de f est l'ensemble $f(\mathcal{D})$, ainsi si $x \in \mathcal{D}$ alors $f(x) = (f_1(x), \dots, f_q(x))$ est dans l'image de f ;*
- *Le graphe de f est l'ensemble*

$$\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \,;\, x \in \mathcal{D}\}\,.$$

Définition 1.1.2. *Lorsque x parcourt l'ensemble de définition, on dit que $x_1, \dots, x_p$ sont les variables de f.*
Les fonctions f_i $(i = 1, \dots, q)$ sont appelées les fonctions coordonnées de f. Elles ont pour domaine l'ensemble $\mathcal{D}$ et ont le même nombre de variables que f. Par contre elles sont à valeurs réelles.
Lorsque $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathcal{D}$ est fixé, on définit la j-ième fonction partielle de f en a en posant :

$$\tilde{f}_{j,a}(t) = f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_p)\,.$$

Ces fonctions ont une seule variable, mais sont à valeurs dans $\mathbb{R}^q$.

On notera que les fonctions coordonnées ont elles-même des fonctions partielles. De la même faon, les fonctions partielles ont leurs propres fonctions coordonnées. On a :

$$(\tilde{f}_{i,a})_j = (\widetilde{f_j})_{i,a}\,.$$

Exemple 1.1.3. *Les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les fonctions d'une seule variable, à valeurs réelles.*

Exemple 1.1.4. *Fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Le graphe de f est une surface de $\mathbb{R}^3$.*

Exemple 1.1.5. *Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. Une telle fonction est un appelé arc paramétré du plan.*

Exemple 1.1.6. *Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$. Une telle fonction est un arc paramétré de l'espace.*

Exemple 1.1.7. *Fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. Une telle fonction est une surface paramétrée de l'espace.*

Remarque 1.1.8. *On peut représenter le domaine si $p \leq 3$, l'image si $q \leq 3$, et le graphe si $p + q \leq 3$.*

Exercice 1.1.9. *Déterminer le domaine des fonctions suivantes :*
- $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$,
- $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$.

1.2 Limites et continuité

Pour les fonctions d'une seule variable, la notion de limite est importante aussi bien pour définir la continuité que la dérivabilité.

Définition 1.2.1. *Une norme dans $\mathbb{R}^n$ est une fonction*

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\| : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^+ \\ v & \mapsto & \|v\|, \end{array}$$

telle que

1. *si $\|v\| = 0$ alors $v = 0$,*
2. *si $\mu \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^n$ alors $\|\mu \cdot v\| = |\mu| \cdot \|v\|$.*
3. *si $v, w \in \mathbb{R}^n$ alors $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.*

Si x et y sont des points et qu'une norme a été choisie, la norme du vecteur $y - x$ est la distance de x à y pour la norme en question :

$$\mathrm{dist}(x, y) = \|y - x|\| .$$

Exemple 1.2.2.
- *Norme euclidienne : $\|v\|_2 = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$.*
- *Norme max : $\|v\|_{\max} = \mathrm{Max}\,(|v_1|, \ldots, |v_n|)$.*

Remarque 1.2.3. *La famille des normes est très très grande.*

Choisissons une norme.

Définition 1.2.4. *On dit que la suite de points $(x_k)_{k\geq 0}$ de points de $\mathbb{R}^n$ converge vers x lorsque la suite numérique $\|x_k - x\|$ tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini.*

Théorème 1.2.5. *(admis) La notion de limite ne dépend pas de la norme choisie.*

Ce théorème permet donc de trouver la limite d'une suite de points en prenant la norme qui convient le mieux. En choisissant la norme max, on voit qu'il suffit de considérer les corrdonnées de la suite séparément. Autement dit nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 1.2.6. *Une suite* $(x_k)_{k\geq 0}$ *de points de* $\mathbb{R}^n$ *converge vers* $a = (a_1, \ldots, \ldots, a_n)$ *si et seulement si, pour tout* $i = 1, \ldots, n$*, la suite des* i*-ème coordonnées* $(x_{k,i})_{k\geq 0}$ *converge vers* a_i*.*

Définition 1.2.7. *Soit* $x \in \mathbb{R}^n$ *et* $r > 0$*. On appelle* <u>*boule ouverte*</u> *de centre* x *et de rayon* r *l'ensemble*

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \,;\, \|y - x\| < r\}\,.$$

Dans le cas d'une égalité large, on parle de boule fermée. Un ensemble $\mathcal{U}$ *est dit* <u>*ouvert*</u> *lorsque pour tout* $x \in \mathcal{U}$*, il existe* ϵ *tel que*

$$B(x, \epsilon) \subset \mathcal{U}\,.$$

Définition 1.2.8. *Une fonction* f *de plusieurs variables est* <u>*continue*</u> *en un point* $x \in \mathcal{D}$*, lorsque pour toute suite* x_n *de points de* $\mathcal{D}$ *qui converge vers* x*, la suite* $f(x_n)$ *converge vers* $f(x)$*.*

1.3 Dérivées partielles et directionnelles

Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^p$ un ouvert et

$$f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}^q$$

une fonction de plusieurs variables.

Définition 1.3.1. *Lorsque la* j*-ème fonction partielle de* f *en* a *est dérivable en* $t = a_j$*, on dit que* f *possède une* j*-ème* <u>*dérivée partielle*</u> *en* a *et on note* $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ *cette dérivée :*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \tilde{f}'_{j,a}(a_j)\,.$$

Proposition 1.3.2. *1 – On a équivalence entre :*

i La fonction f *possède une* j*-ème dérivée partielle en* a

ii Les fonctions coordonnées f_i *de* f *possède toutes des* j*-ème dérivées partielles en* a

2 – Lorsque f *possède une* j*-ème dérivée partielle en* a*, alors*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_j}(a) \end{bmatrix}\,.$$

Définition 1.3.3. *Lorsque* f *possède une* j*-ème dérivée partielle en* a *pour tout* j*, on peut définir la* <u>*matrice jacobienne*</u> *de* f *en* a *:*

$$\mathrm{Jac}(f, a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{bmatrix}$$

Définition 1.3.4. *Soit $a \in \mathcal{D}$. Soit un vecteur h de $\mathbb{R}^p$. Lorsque la fonction*

$$t \longmapsto f(a+th)$$

est dérivable en $t=0$, on dit que f possède une dérivée en a dans la direction de h. On note $f'_h(a)$ cette dérivée. C'est un vecteur de $\mathbb{R}^q$ qui, par définition, est la limite, lorsque t tend vers 0, des vecteurs

$$\frac{1}{t}\left(f(a+th)-f(a)\right).$$

Remarque 1.3.5. *Soit $e_1, \ldots, e_p$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Alors*

$$f'_{e_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Ainsi en abrégeant la notation on trouve dans certain livre que la j-ème dérivée partielle de f en a est notée $f'_j(a)$.

Exemple 1.3.6.

Problématique. Comment $h \mapsto f'_h(x)$ dépend-il de h ? Linéairement ?

1.4 La Différentielle

1.4.1 Définition

Définition 1.4.1. *Différentielle, ou dérivée. Notation $D_x f$.*

Exemple 1.4.2. *Dérivée d'une fonction constante. Dérivée d'une fonction linéaire.*

1.4.2 Propriétés élémentaires

Proposition 1.4.3 (Propriétés élémentaires de la dérivée)**.**

1.4.3 Lien avec les dérivées partielles

Proposition 1.4.4. *Si f est dérivable en x, elle admet une dérivée dans la direction de h, pour tout $h \in \mathbb{R}^p$, et $D_x f(h) = f'_h(x)$.*

Corollaire 1.4.5.

$$D_a f(h) = \mathrm{Jac}(f,a)\cdot h = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) + \cdots + h_p\frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots \\ \vdots \\ h_1\frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) + \cdots + h_p\frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{bmatrix}.$$

Théorème 1.4.6. *Une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si toutes ses dérivées partielles existent et sont continues.*

1.5 Dérivée d'une fonction composée

1.5.1 La formule

Proposition 1.5.1. *Sous les bonnes hypothèses*

$$D_a(g \circ f) = D_{f(a)}g \circ D_a f$$

1.5.2 Exemples de changement de variables

Exemple 1.5.2. *Passage dans les deux sens des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires*

Exemple 1.5.3. *Changements de variables linéaires*

1.6 Inégalités des accroissements finis

1.6.1 Cas des fonctions réelles

Rappel. Fonctions réelles de la variable réelle.

Théorème 1.6.1. *Égalité des accroissements finis pour les fonctions réelles.*

Dessin.

1.6.2 Cas général

Inégalités des accroissements finis

Exemple 1.6.2. *Contre exemple pour l'égalité en général :* $f(t) = (\cos t, \sin t)$.

Théorème 1.6.3. *Inégalités des accroissements finis*

Autour de la compacité

Définition 1.6.4. *Partie compacte (avec les suites de Cauchy). Partie bornée.*

Proposition 1.6.5. *Les compactes sont les fermés bornés.*

Théorème 1.6.6. *Toute fonction continue sur un compact est d'image bornée.*

En particulier, dans le cas où la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, la constante M dans le théorème 1.6.3 est toujours définie.

1.7 Notion de difféomorphisme

Définition 1.7.1. *Difféomorphisme global, local.*

Théorème 1.7.2 (Théorème d'inversion locale)**.** *(Admis)*

Exemple et contre-exemple de fonction réelle d'une variable réelle.

1.8 Dérivées d'ordre supérieur

1.8.1 Théorème de Schwarz

Définition 1.8.1. *Dérivées d'ordre* 2*.*

Théorème 1.8.2. *de Schwarz*

1.8.2 Recherche d'extremum

Définition 1.8.3. *Points critiques. Extrema locaux et globaux.*

Théorème 1.8.4.

1. *Extrema local $\Rightarrow$ point critique.*
2. *Condition sur la hessienne. Point selle.*

Chapitre 2

Intégration des fonctions réelles de plusieurs variables

2.1 L'intégrale de Riemann

2.1.1 Ensembles quarrables

Définition 2.1.1. — *Pavé*
- *Fonction indicatrice, en escalier*
- *Intégrale des fonctions en escaliers*

Définition 2.1.2. — *Fonctions intégrables (au sens de Riemann)*
- *Ensembles mesurables*

Premiers exemples.

Proposition 2.1.3. *L'image d'un ensemble mesurable par un diffeomorphisme est un ensemble mesurable.*

Limites de la théorie.

2.1.2 Théorème de Fubini

Théorème 2.1.4. *(Théorème de Fubini)*
Soient P et Q deux pavés de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ respectivement. Soit $f\colon P\times Q \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur le pavé $P\times Q$.
- *Pour tout $x\in P$, la fonction $y\mapsto f(x,y)$ est intégrable sur Q.*
- *La fonction $x\mapsto \int_Q f(x,y)\,dy$ est intégrable sur P.*
- *Pour tout $y\in Q$, la fonction $x\mapsto f(x,y)$ est intégrable sur P.*
- *La fonction $y\mapsto \int_P f(x,y)\,dx$ est intégrable sur Q.*
- *Si f est continue, alors*
$$\int_P\left(\int_Q f(x,y)\,dy\right)\,dx = \int_Q\left(\int_P f(x,y)\,dx\right)\,dy\,.$$
- *Si l'égalité précédente est vérifiée, alors f est intégrable sur le pavé $P\times Q$ et*
$$\int_{P\times Q} f(x,y)\,dxdy = \int_P\left(\int_Q f(x,y)\,dy\right)\,dx = \int_Q\left(\int_P f(x,y)\,dx\right)\,dy\,.$$

Application 2.1.5. *Soit $A \subset \mathbb{R}^p$ et $B \in \mathbb{R}^q$ deux ensembles quarrables. Soit $h\colon \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ une fonction telle qu'il existe des fonctions intégrables $f\colon A \to \mathbb{R}$ et $g\colon B \to \mathbb{R}$ vérifiant $h(x, y) = f(x)g(y)$. Alors*

- *l'ensemble $A \times B$ est quarrable,*
- *la fonction h est intégrable sur $A \times B$, et*
- *on a l'égalité :*

$$\int_{A\times B} h(x,y)\,dxdy = \int_A f(x)\,dx \cdot \int_B g(y)\,dy\,.$$

Application 2.1.6. *(Sommation par piles)*
Soit $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un ensemble quarrable. Soient $\varphi_i\colon B \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ deux fonctions continues sur B, telles que pour tout $x \in B$ on ait $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$. Alors le sous-ensemble A de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$A = \{(x, y) \in B \times \mathbb{R}\,;\, \varphi(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

est mesurable et pour toute fonction $f\colon A \to \mathbb{R}$ continue, on a

$$\int_A f(x,y)\,d(x,y) = \int_B \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)\,dx$$

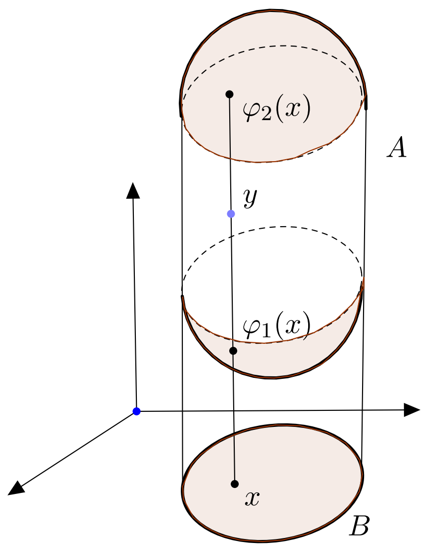

FIGURE 2.1 – Sommation par piles

Application 2.1.7. *(Sommation par tranches)*
Soit A un ensemble quarrable compact de $\mathbb{R}^n$ tel que poour tout $(x, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ vérifiant $(x, x_n) \in A$, on ait $a \leq x_n \leq b$. Supposons que pour tout $x_n \in [a, b]$, l'ensemble

$$A(x_n) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1}, (x, x_n) \in A\}$$

est quarrable. Alors pour toute fonction continue $f\colon A \to \mathbb{R}$, on a

$$\int_A f(x,x_n)\,d(x,x_n) = \int_a^b \left(\int_{A(x_n)} f(x,x_n)\,dx\right)\,dx_n\,.$$

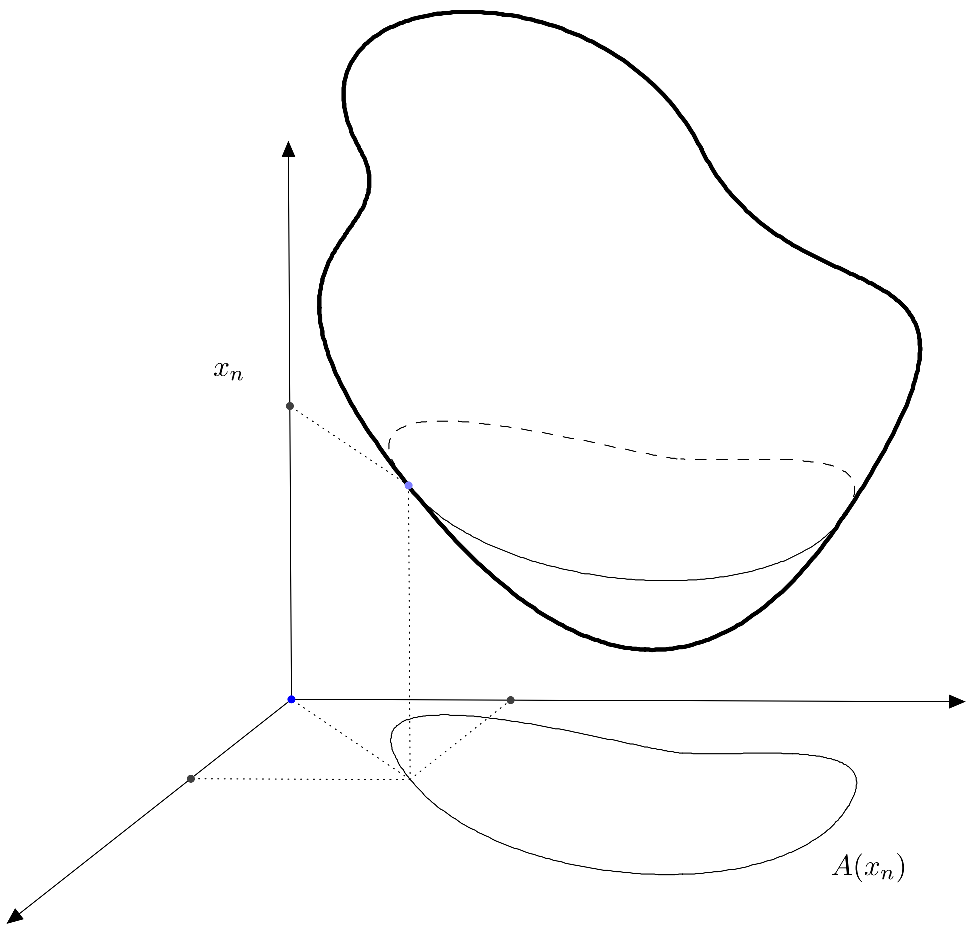

FIGURE 2.2 – Sommation par tranches

2.1.3 Changements de variables

Théorème 2.1.8. *(Changement de variables)*
Soit $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert quarrable U de $\mathbb{R}^n$ sur son image. On suppose que la fonction

$$x \mapsto \det\left(\mathrm{Jac}(\varphi, x)\right)$$

est bornée sur U. Alors $\varphi(U)$ est quarrable et pour toute fonction $f\colon V \to \mathbb{R}$ intégrable sur $\varphi(U)$, on a

$$\int_{\varphi(U)} f(v)\,dv = \int_U f(\varphi(u))\,\left|\det\left(\mathrm{Jac}(\varphi, u)\right)\right|\,du\,.$$

Exemple 2.1.9. *(Changement de variable linéaire) Si φ est linéaire, alors $\mathrm{Jac}(\varphi, x) = \varphi$ pour tout x dans U est la formule s'écrit*

$$\int_{\varphi(U)} f(v)\,dv = \int_U f(\varphi(u))\,\left|\det(\varphi)\right|\,du\,.$$

Exemple 2.1.10. *(Changement encoordonnées polaires)*
Pour $(x,y) = \varphi(r,\theta)$ *on trouve*

$$\det\left(\mathrm{Jac}(\varphi,x)\right) = \left|\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\right|$$

et l'on a ainsi pour un domaibne représenté par U *en coordonnées cartésienne et par* Δ *en coordonnées polaires*

$$\int_U f(x,y)\,dxdy = \int_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,drd\theta\,.$$

Exemple 2.1.11. *(Calcul d'aire)*

Exemple 2.1.12. *(Calcul de volumes)*

2.2 Intégrales curvilignes

2.2.1 Arcs paramétrés

Définition 2.2.1. *(Arc paramétré)*
On appelle arc paramétré, ou chemin, une application

$$f\colon I \to \mathbb{R}^n$$

où I *est un intervalle fermé (borné) de* $\mathbb{R}$. *L'ensemble* $f(I)$ *s'appelle l'image de* f, *ou encore le support de* f.

Définition 2.2.2. *(Equivalence entre deux arcs paramétrés)*
Soit I *et* J *deux intervalles de* $\mathbb{R}$ *et,* f *et* g *deux chemins de classe* $\mathcal{C}^1$ *définis sur* I *et* J *respectivement. On dit que* f *et* g *sont équivalents s'il existe un difféomorphisme* θ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *de* I *sur* J *tel que* $f = g \circ \theta$. *Les classes d'équivalences de chemins sont appelées des arcs géométriques.*

Remarque 2.2.3. *Deux chemins equivalents ont le même support. On peut donc parler du support d'un arc géométrique.*

Définition 2.2.4. *On dit que deux chemins équivalents ont le même sens, ou la même orientation, lorsque le difféomorphisme* θ *peut être choisi croissant.*

Formes différentielles

Soit (e_i) la base canonique de R^n et dx_i la base duale, c'est-à-dire que (dx_i) est la base du dual $(\mathbb{R}^n)^*$ de $\mathbb{R}^n$ (l'espace des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$) définie par

$$dx_i(e_j) = 1 \text{ si } i = j \text{ et } 0 \text{ sinon}\,.$$

Définition 2.2.5. *(Formes différentielles de degré* 1*)*
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle forme différentielle sur U une application ω dans $(\mathbb{R}^n)^*$,

$$\omega\colon U \to (\mathbb{R}^n)^* .$$

Toute forme différentielle peut se mettre de manière unique sous la forme

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x)\, dx_i \,, (x \in U)\,,$$

où pour tout i fixé, ω_i est une fonction de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.2.6. *Si f est une fonction différentiable sur U à valeurs réelles on définit une forme différentielle df en posant*

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\, dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\, dx_n \,.$$

Si ω est une forme telle qu'il existe f telle que $\omega = df$, alors on dit que ω est exacte. En outre, si $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, dx_i$ vérifie

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}$$

on dit que ω est fermé.

Remarque 2.2.7. *D'après le théorème de Schwarz si f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors la forme différentielle df est fermée. Autrement dit, toute forme exacte est fermée.*

La réciproque est fausse en général, mais elle est aussi parfois vrai comme le montre le célèbre théorème suivant.

Théorème 2.2.8. *(de Poincaré)*
Sur un ouvert U étoilé, toute forme différentielle fermée est exacte.

2.2.2 Intégrales curvilignes

Nous définissons ici la notion d'intégrale d'une forme différentielle de degré 1 le long d'un arc paramétré.

Définition 2.2.9. *Soit γ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ défini sur l'intervalle $[a, b]$. Soit $\omega = \sum_i \omega_i \, dx_i$ une forme différentielle de degré 1 définie sur un ouvert contenant le support $\gamma([a, b])$ de γ. On définit l'intégrale curviligne $\int_\gamma \omega$ de ω le long du chemin γ en posant*

$$\int_\gamma \alpha \; = \int_a^b \omega(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt \; = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\gamma(t))\gamma_i'(t)\, dt \;.$$

Proposition 2.2.10. *Si γ est un arc paramétré défini sur $[a, b]$, et $\omega = df$ est une forme exacte définie sur un ouvert contenant le support de γ, alors*

$$\int_\gamma \omega \; = f(\gamma(a)) - f(\gamma(b))\,.$$

En particulie, l'intégrale d'une forme différentielle exacte le long d'un chemin fermé est nulle.

Exemple 2.2.11. *Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ on définit la forme différentielle γ par*

$$\omega(x,y) = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}\,.$$

- *Vérifier que ω est fermée.*
- *Soit γ le lacet défini sur $[0,2\pi]$ par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Montrer que $\int_\gamma \omega = 2\pi$.*
- *En déduire que γ n'est pas exacte.*

2.2.3 Formule de Green-Riemann

La formule de Green-Riemann établit le lien qui unit les intégrales multiples des fonctions de plusieurs variables et les intégrales des formes différentielles de degré 1 le long d'un chemin. Nous ne verrons ici que le cas des fonctions de deux variables.

Définition 2.2.12. *(Compact à bord)*
Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$. On dit que K est un compact à bord lorsque :

i. *il existe une famille $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ de chemins fermés simples (i.e. injectifs) et continus de classe $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux, dont les supports C_i sont disjoints et dont la réunion est la frontière ∂K de K ;*
ii. *en tout point $a = \gamma_i(t)$ régulier (i.e. $\gamma_i'(t)$ existe) il exite un pavé centré en a tel que*
   - *$P \setminus (\partial K \cap P)$ a deux composantes connexes, l'une étant contenue dans K et l'autre dans son complémentaire,*
   - *la composante contenue dans K est à gauche de γ_i (i.e. pour tout point b de $P \setminus (\partial K \cap P)$ l'angle $(\gamma_i'(t), \overrightarrow{ab})$ est compris entre 0 et π).*

Théorème 2.2.13. *(de Green Riemann)*
Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un compact à bord et $\omega = Pdx + Qdy$ une forme différentielle de degré 1 de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert contenant K. Alors K est quarrable et

$$\int_{\partial K^+} (P\,dx + Q\,dy) = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dxdy\,.$$

Corollaire 2.2.14. *Pour calculer l'aire d'un compact à bord K, on doit calculer $\iint_K dxdt$. Il faut donc trouver deux fonctions P et Q de deux variables telles que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$. Il suffit donc de prendre $P(,x,y) = -y/2$ et $Q(x,y) = x/2$, c'est-à-dire la forme*

$$\omega(x,y) = \frac{1}{2}\big(x\,dy - y\,dx\,\big)\,.$$

Exemple 2.2.15. *Pour l'éllipse $\mathcal{E}$ dont le bord est paramétrée par*

$$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$$

on obtient :

$$\mathrm{Aire}(\mathcal{E}) = \iint_K dxdy = \int_{\partial_K^+} \frac{1}{2}\big(x\,dy - y\,dx\,\big) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-b\sin t, a\cos t) \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix} dt = \pi ab\,.$$

Exemple 2.2.16. *Montrer que la forme différentielle $\omega(x,y) = x\,dy - y\,dx$ s'exprime en coordonnées polaire par $\omega(r,\theta) = r^2\,d\theta$. Calculer l'aire de la cardidoïde*

$$r(\theta) = 1 + \cos\theta\,.$$

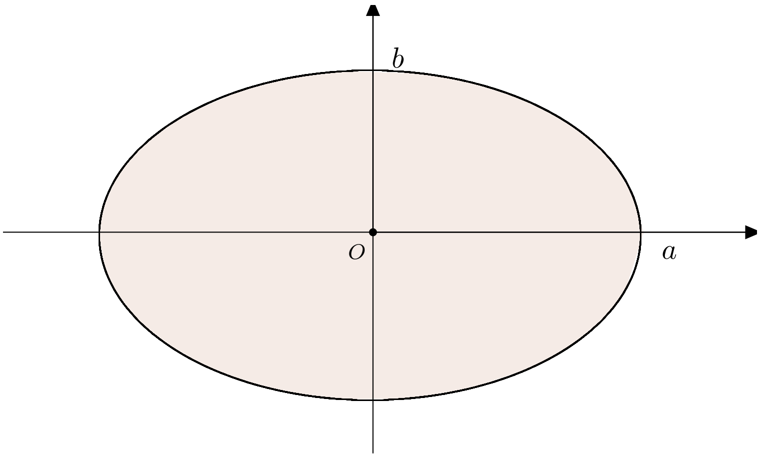

Figure 2.3 – Éllipse

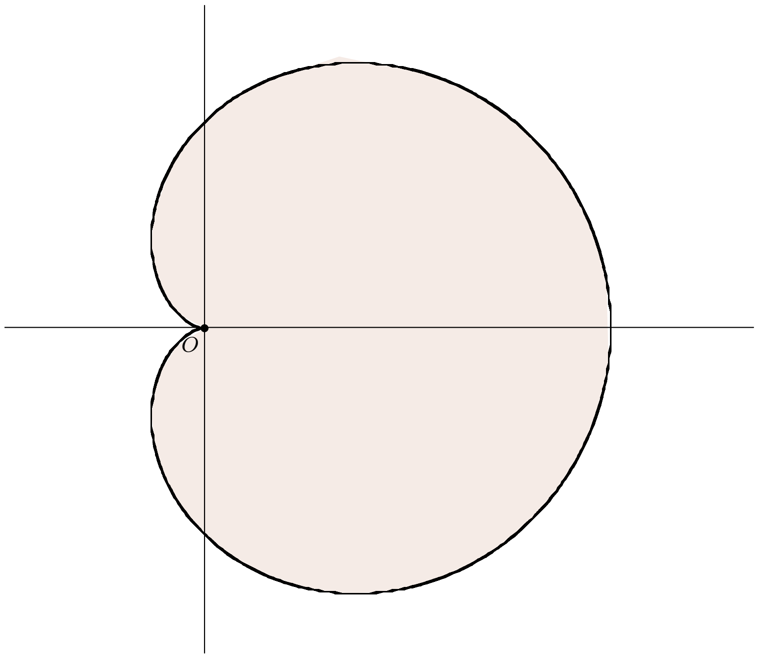

Figure 2.4 – Cardioïde