Remarques à propos de l'opérateur de Dirac cubique

Nicolas Prudhon

Laboratoire de mathématiques et applications de Metz, Unité Mixte de Recherche 7122 du CNRS Université de Metz et CNRS, Bât. A, Ile du Saulcy, F-57045 METZ Cedex 1, FRANCE

Reçu le 21 Juin 2010, accepté après révision le 27 Octobre 2010

Présenté par Michel Duflo

Résumé

En 1999, Kostant introduit un opérateur de Dirac cubique $D_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ associé à tout triplet $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, B)$, où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie complexe munie de la forme bilinéaire symétrique $ad\,\mathfrak{g}$-invariante non dégénérée B, et $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ sur laquelle B est non dégénérée. Kostant montre alors que le carré de $D_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ vérifie une formule qui généralise la formule de Parthasarathy Nous donnons ici une nouvelle démonstration de cette formule. Tout d'abord, au moyen d'une induction par étage, nous montrons qu'il suffit d'établir la formule dans le cas particulier où $\mathfrak{h} = 0$. Il apparaît alors que, dans ce cas, l'annulation du terme d'ordre 1 dans la formule de Kostant pour $D^2_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ est une conséquence de propriétés classiques en cohomologie des algèbres de Lie, tandis que le fait que le carré du terme cubique soit scalaire résulte de telles considérations, ainsi que de l'identité de Jacobi.

Abstract

Remarks on the Kostant Dirac operator In 1999, Kostant indroduced a Dirac operator $D_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ associated to any triple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, B)$, where $\mathfrak{g}$ is a complex Lie algebra provided with an $ad\,\mathfrak{g}$-invariant non degenerate nsymetric bilinear form B, and $\mathfrak{h}$ is a Lie subalgebra of $\mathfrak{g}$ such that the bilinear form B is non degenerate on $\mathfrak{h}$. Kostant then shows that the square of this operator safisties a formula that generalizes the so-called Parthasarathy formula. We give here a new proof of this formula. First we use an induction by stage argument to reduce the proof of the formula to the particular case where $\mathfrak{h} = 0$. In this case we show that the vanishing of the first ordrer term in the Kostant formula for $D^2_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ is a consequence of classic properties related to Lie algebra cohomology, and the fact that the square of the cubic term is a scalar follows from such considerations, together with the Jacobi identity.

Commençons par définir l'opérateur de Dirac cubique. Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, B)$ un triplet où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie complexe, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, et B est une forme bilineaire symétrique sur $\mathfrak{g}$ invariante par l'action adjointe, i.e.

$$B([x, y], z) + B(y, [x, z]) = 0\,, \quad (\forall x, y, z \in \mathfrak{g})\,. \tag{1}$$

Nous supposons en outre que B est non dégénérée, ainsi que sa restriction à $\mathfrak{h}$. La restriction de B à l'orthogonal $\mathfrak{h}^\perp$ de $\mathfrak{h}$ pour B, est alors non dégénérée, et on obtient la décomposition $ad\,\mathfrak{l}$-invariante

Email address: `prudhon@univ-metz.fr` (Nicolas Prudhon).

$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$. Ainsi l'algèbre $\mathfrak{h}$ est représentée dans $\mathfrak{h}^{\perp}$ par restriction de l'action adjointe, induisant un homomorphisme

$$\nu\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{so}(\mathfrak{h}^{\perp})\,.$$

Comme la forme bilinéaire B est non dégénérée sur $\mathfrak{h}^{\perp}$, nous pouvons également définir l'algèbre de Clifford $\mathcal{C}(\mathfrak{h}^{\perp})$. Plus précisément, l'algèbre de Clifford est le quotient de l'algèbre tensorielle $T(\mathfrak{h}^{\perp})$ par l'idéal engendré par les élements de la forme

$$xy + yx - 2B(x,y)\,,\ \text{où } x, y \in \mathfrak{h}^{\perp}\,. \tag{2}$$

Nous identifierons l'espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre de Clifford $\mathcal{C}(\mathfrak{h}^{\perp})$ à celui de l'algèbre extérieur $\wedge\mathfrak{h}^{\perp}$ au moyen de l'isomorphisme de Chevalley. Pour tout $u, v \in \wedge\mathfrak{h}^{\perp}$, nous distinguerons alors le produit de Clifford uv et le produit extérieur $u \wedge v$. Le produit extérieur par u sera noté $e(u)$. La forme B s'étend à $\wedge\mathfrak{h}^{\perp}$ en une forme non dégénérée et fournit ainsi un isomorphisme de l'algèbre extérieure avec son dual : $\wedge\mathfrak{h}^{\perp} = \big(\wedge\mathfrak{h}^{\perp}\big)^{*}$. La transposée $\iota(x)$ de $e(x)$ pour $x \in \mathfrak{h}^{\perp}$, peut alors être vue comme endomorphisme de $\wedge\mathfrak{h}^{\perp}$, et l'on a alors, pour $w \in \wedge\mathfrak{h}^{\perp}$ et $x \in \mathfrak{h}^{\perp}$,

$$xw = \big(e(x) + \iota(x)\big)w\,.$$

Les relations de Clifford (2) s'étendent également de la façon suivante :

$$xw - (-1)^{k} wx = 2\iota(x)w\,,\ \text{où } x \in \mathfrak{h}^{\perp} \text{ et } w \in \wedge^{k}\mathfrak{h}^{\perp}\,. \tag{3}$$

En outre, à travers ces isomorphismes, la restriction de la 3-forme fondamentale de $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{h}^{\perp}$, i.e.

$$v\colon\ \wedge^{3}\mathfrak{h}^{\perp} \to \mathbb{C}\,,\quad B(v, x\wedge y\wedge z) = -\frac{1}{2}B(x,[y,z])\,,$$

définit un élément $v_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \in \mathcal{C}(\mathfrak{h}^{\perp})$. Soit maintenant (X_i) une base orthonormée de $\mathfrak{h}^{\perp}$, et $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ l'algèbre de Lie enveloppante de $\mathfrak{g}$.

Définition 1 *L'opérateur de Dirac cubique est l'élément $D_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{C}(\mathfrak{h}^{\perp})$ défini par*

$$D_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} = \sum_i X_i \otimes X_i + 1 \otimes v_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}\,.$$

Le qualificatif cubique exprime le fait que $v_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ est de degré 3.

Il existe un unique homomorphisme d'algèbres $\Delta_{\mathfrak{h}}$ défini par

$$\Delta_{\mathfrak{h}}\colon \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{C}(\mathfrak{h}^{\perp})\,,\qquad \Delta_{\mathfrak{h}}(y) = y \otimes 1 + 1 \otimes \nu(y)\quad (y \in \mathfrak{h})\,.$$

La $\mathbb{Z}$-graduation sur l'algèbre tensorielle induit une $\mathbb{Z}_2$-graduation sur l'algèbre de Clifford. En effet, l'automorphisme κ de $\mathfrak{h}^{\perp}$ défini par $\kappa(x) = -x$ vérifie $\kappa^2 = 1$, et se prolonge donc d'après (2) en un automorphisme de $\mathcal{C}(\mathfrak{h}^{\perp})$ encore noté κ. La $\mathbb{Z}_2$-graduation est alors donnée par la décomposition de $\mathcal{C}(\mathfrak{h}^{\perp})$ en sous-espaces propres. En notant $\bar{\otimes}$ le produit tensoriel gradué, nous avons un isomorphisme d'algèbres graduées

$$\mathcal{C}(\mathfrak{g}) = \mathcal{C}(\mathfrak{h}^{\perp})\,\bar{\otimes}\,\mathcal{C}(\mathfrak{h})\,.$$

En considérant la graduation triviale sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, on obtient une $\mathbb{Z}_2$-graduation sur le produit tensoriel $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{C}(\mathfrak{h}^{\perp})$.

Lemme 2 *L'opérateur de Dirac cubique est alors $\mathfrak{h}_{\Delta}$-invariant, i.e.*

$$D_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \in \big(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{C}(\mathfrak{h}^{\perp})\big)^{\mathfrak{h}_{\Delta}}\,,$$

commute, au sens gradué, avec l'image $\mathfrak{h}_{\Delta} = \Delta_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{h})$.

Soit (Y_j) une base orthonormée de $\mathfrak{h}$, $\Omega_{\mathfrak{h}} = \sum_j Y_j^2 \in \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ l'opérateur de Casimir pour $\mathfrak{h}$, et $\Omega_{\mathfrak{g}} = \sum_i X_i^2 + \sum_j Y_j^2 \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ l'opérateur de Casimir pour $\mathfrak{g}$.

Théorème 3 *[Kos99] Le carré de $D_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ vérifie la formule suivante.*

$$D^2_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} = \Omega_{\mathfrak{g}} \otimes 1 - \Delta_{\mathfrak{h}}(\Omega_{\mathfrak{h}}) + c_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$$

Le premier argument de la démonstration que nous donnons ici, de type induction par étage, apparaît dans [HPR06,HP06]. On pourra également consulter [MZ06]. Notons $D_{\mathfrak{r}}$ l'opérateur de Dirac Kostant associé à un triplet de la forme $(\mathfrak{r}, 0, B)$.

Lemme 4 *[HP06, Theorem 9.4.1]*
(i) On a la décomposition suivante

$$D_{\mathfrak{g}} = D_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \bar{\otimes} 1 + \Delta_{\mathfrak{h}} \bar{\otimes} 1(D_{\mathfrak{h}})\,.$$

(ii) Les composantes $D_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \bar{\otimes} 1$ et $\Delta_{\mathfrak{h}} \bar{\otimes} 1(D_{\mathfrak{h}})$ anticommutent.
Ce lemme résulte essentiellement du lemme 2 et de la définition du produit tensoriel gradué.

La conséquence de ce lemme dont nous avons besoin est la suivante :

$$D^2_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \bar{\otimes} 1 = D^2_{\mathfrak{g}} - \Delta_{\mathfrak{h}} \bar{\otimes} 1\left(D^2_{\mathfrak{h}}\right)\,.$$

Ainsi, le théorème 3 résulte du même théorème pour les algèbres de Lie quadratiques, i.e. les triplets du type $(\mathfrak{r}, 0, B)$. En outre, on a également

$$c_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} = c_{\mathfrak{g}} - c_{\mathfrak{h}}\,.$$

Il reste maintenant à montrer le théorème dans le cas où $\mathfrak{h} = 0$ (et donc $\mathfrak{h}^\perp = \mathfrak{g}$).

La même technique d'induction par étage est utilisé par A. Alekseev et E. Meinrenken pour montrer la formule de Kostant [AM05, Proposition 6.4]. La formule pour les algèbres de Lie quadratiques (théorème 5) apparaît également dans [AM05, Proposition 5.4], mais leur démonstration, sensiblement différente de celle présentée ici, est faite dans le contexte des algèbres de Weil. Nous remercions le rapporteur d'avoir porté à notre connaissance l'article de A. Alekseev et E. Meinrenken [AM05], ainsi que les points communs avec cette note.

Théorème 5 *Soit $(\mathfrak{g}, B)$ une algèbre de Lie quadratique. Le carré dans l'algèbre de Clifford $\mathcal{C}(\mathfrak{g})$ de la 3-forme fondamentale est un scalaire $c_{\mathfrak{g}}$ et*

$$D^2_{\mathfrak{g}} = \Omega_{\mathfrak{g}} + c_{\mathfrak{g}}\,.$$

Démonstration. Posons $v = v_{\mathfrak{g}}$ pour simplifier les notations et calculons $D^2_{\mathfrak{g}}$. Pour ceci, introduisons la transposée du corchet de Lie $\delta\colon \mathfrak{g} \to \wedge^2\mathfrak{g}$. Nous avons

$$\delta(x) = \sum_{i<j} B(x, [X_i, X_j]) X_i \wedge X_j\,, \quad (x \in \mathfrak{g})\,.$$

Par la suite, $\wedge^2\mathfrak{g}$ est identifié à un sous-espace de $\mathcal{C}(\mathfrak{g})$ comme précédement, de sorte que $\delta(X) \in \mathcal{C}(\mathfrak{g})$. Introduisons également la dérivation d_v de l'algèbre graduée $\mathcal{C}(\mathfrak{g})$ donnée par

$$d_v(a) = va - \kappa(a)v\,, \quad (a \in \mathcal{C}(\mathfrak{g}))\,.$$

Remarquons que d_v est bien une dérivation car

$$d_v(ab) = vab - \kappa(ab)v = vab - \kappa(a)\kappa(b)v = (va - \kappa(a)v)b + \kappa(a)(vb - \kappa(b)v) = (d_v a)b + \kappa(a) d_v b\,.$$

Il vient,

$$\begin{aligned} D^2_{\mathfrak{g}} &= \left(\sum_i X_i \otimes X_i\right)\left(\sum_j X_j \otimes X_j\right) + \sum_k X_k \otimes d_v(X_k) + v^2 \\ &= \left(\sum X_i^2\right) \otimes 1 + \sum_{i<j} [X_i, X_j] \otimes X_i X_j + \sum_k X_k \otimes d_v(X_k) + v^2 \end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{i<j}[X_i, X_j] \otimes X_i X_j = \sum_k X_k \otimes \left(\sum_{i<j} B(X_k, [X_i, X_j]) X_i X_j \right) = \sum X_k \otimes \delta(X_k)\,.$$

Ainsi,

$$D_{\mathfrak{g}}^2 = \Omega_{\mathfrak{g}} \otimes 1 + v^2 + \sum_k X_k \otimes (\delta + d_v)(X_k)\,.$$

Il suffit donc de montrer que $\delta + d_v = 0$ et que v^2 est scalaire. La relation $\delta + d_v = 0$ peut être *vérifiée* en quelques lignes en écrivant d_v explicitement dans une base orthonormée [Agr03, Lemma 3.3]. Nous préfèrons la démonstration suivante, qui explique davantage *pourquoi* une telle relation est vraie.

Pour cela commençons par étendre δ en une dérivation de l'algèbre $\wedge\mathfrak{g}$. Pour $X \in \mathfrak{g}$, notons $X^* = B(X, \cdot)$ la forme linéaire associée. On peut alors écrire $\delta(X^*)(Y, Z) = X^*([Y, Z])$. Soit $C^k(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ l'espace des applications k-linéaires sur $\mathfrak{g}$, non nécessairement alternées. Alors δ n'est autre que la restriction de la différentielle

$$d \colon C^k(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) \to C^{k+1}(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$$

donnée par

$$dw(x_0, \ldots, x_k) = \sum_{s<t} (-1)^s w(x_0, \ldots, \hat{x}_s, \ldots, [x_s, x_t], \ldots, x_k)\,.$$

Le lien fondamental entre v, δ et B est alors donné par la relation $dB = 2v$. En effet, comme la forme bilinéaire B est $ad\,\mathfrak{g}$-invariante,

$$dB(x, y, z) = B([x, y], z) + B(y, [x, z]) - B(x, [y, z]) = -B(x, [y, z]) = 2v(x, y, z)\,.$$

Pour $X \in \mathfrak{g}$, notons θ_X l'action de X sur $C^k(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$,

$$\theta_X w(x_1, \ldots, x_k) = \sum_s w(x_1, \ldots, [X, x_s], \ldots, x_k)\,,$$

Remarquons que l'invariance de B, équation (1), s'écrit alors $\theta_X B = 0$. Rappelons encore que ι_X est défini sur $C^\bullet(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ par $\iota_X w(\cdot) = w(X, \cdot)$.

On a également la formule de Cartan

$$\iota_X d + d\iota_X = \theta_X\,.$$

Ainsi, pour $X \in \mathfrak{g}$, utilisant l'équation (3),

$$d_v(X) = 2\iota_X v = \iota_X dB = -d\iota_X B + \theta_X B = -dX^* = -\delta(X)\,.$$

Nous avons donc obtenu la relation recherchée $\delta + d_v = 0$.

Venons-en maintenant à l'examen de v^2. L'opérateur d laisse stable l'espace des formes alternées $\wedge\mathfrak{g}^*$, algèbre sur lequel il définit une dérivation - pour la graduation définie par la parité du degré. Nous venons donc de montrer que d et d_v étaient des dérivations, qui à une consante près, coïncidaient en degré 1. Il en est donc de même sur toute l'algèbre $\wedge\mathfrak{g}$. Le fait que $d^2 = 0$ est une conséquence immédiate de l'identité de Jacobi. En effet, en degré 1,

$$d^2 w(x, y, z) = dw([x, y], z) + dw(y, [x, z]) - dw(x, [y, z]) = w([[x, y], z] + [y, [x, z]] - [x, [y, z]]) = 0\,.$$

Autrement dit, toujours en degré 1, $d^2 = (\delta \otimes 1) \circ Alt \circ \delta = 0$, car le coproduit δ vérifie l'identité de Jacobi duale. Nous en déduisons que $d_v^2 = 0$. Par ailleurs, comme l'automorphisme κ vérifie $\kappa(v) = -v$ et $\kappa^2(a) = a$,

$$d_v^2 a = v(va - \kappa(a)v) - \kappa(va - \kappa(a)v)v = v^2 a - av^2\,.$$

Par conséquent, v^2 est dans le centre de l'algèbre de Clifford. En dimension paire, le centre est réduit au scalaire, et donc v^2 est scalaire. Dans le cas de la dimension impaire, le centre est engendré par les scalaires et les éléments de degré maximal, qui sont donc de degré impair. Or, comme v est de degré 3, son carré v^2 ne peut contenir que des termes de degré pair. Donc v^2 est scalaire dans ce cas également. $\square$

Références

[Agr03] Ilka Agricola. Connections on naturally reductive spaces, their Dirac operator and homogeneous models in string theory. *Comm. Math. Phys.*, 232(3) :535–563, 2003.

[AM05] A. Alekseev and E. Meinrenken Lie theory and the Chern-Weil homomorphism. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 38(4) :303–338, 2005.

[HP06] Jing-Song Huang and Pavle Pandžić. *Dirac operators in representation theory.* Mathematics : Theory & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2006.

[HPR06] Jing-Song Huang, Pavle Pandžić, and David Renard. Dirac operators and Lie algebra cohomology. *Represent. Theory*, 10 :299–313 (electronic), 2006.

[Kos99] Bertram Kostant. A cubic Dirac operator and the emergence of Euler number multiplets of representations for equal rank subgroups. *Duke Math. J.*, 100(3) :447–501, 1999.

[MZ06] S. Mehdi and R. Zierau. Principal series representations and harmonic spinors. *Adv. Math.*, 199(1) :1–28, 2006.

[Par72] R. Parthasarathy. Dirac operator and the discrete series. *Ann. of Math. (2)*, 96 :1–30, 1972.