Géométrie affine et euclidienne

Feuille d'exercices n° 2

Applications affines et barycentres

Exercice 1 Soient $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ deux applications affines. Déterminer l'application linéaire associée à $g \circ f$.

Exercice 2 (Translations) **a.** Montrer que l'ensemble des translations $\mathcal{T}(E)$ d'un espace affine E est un groupe abélien. Montrer qu'une application affine de E dans E est une translation si et seulement si son application linéaire associée est l'identité de $\overrightarrow{E}$.
b. Montrer que l'ensemble des bijections affines $\mathcal{GA}(E)$ d'un espace affine E est un groupe. Est-il abélien ?
c. Montrer que le groupe des translations $\mathcal{T}(E)$ est un sous-groupe distingué du groupe des bijections affines $\mathcal{GA}(E)$.

Exercice 3 (Homothéties) Soit $A \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Pour tout point $B \in E$ on définit

$$h_{A,\lambda}(B) = A + \lambda\overrightarrow{AB}\,.$$

a. Montrer que $h_{A,\lambda}$ est une application affine dont on déterminera l'application linéaire associée.

On dit que $h_{A,\lambda}$ est l'homothétie de centre A et de rapport λ.
b. Montrer que l'ensemble

$$\{h_{A,\lambda}\,;\,\lambda > 0\}$$

est une groupe abélien.

De même, montrer que l'ensemble

$$\mathcal{H}_A(E) = \{h_{A,\lambda}\,;\,\lambda \neq 0\}$$

est une groupe abélien.

Soit $\mathcal{H}(E)$ l'ensemble de toutes les homothéties (de rapport non nul) de E.
c. Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$, $A \in E$, et $\lambda \neq 0$. Soit $t_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Déterminer $t_{\overrightarrow{u}} \circ h_{A,\lambda} \circ t_{\overrightarrow{u}}^{-1}$.
d. Soient $A, B \in E$, et $\lambda, \mu \neq 0$. Déterminer $h_{A,\lambda} \circ h_{B,\mu}$.
e. Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{T}(E) \cup \mathcal{H}(E)$$

est un sous-groupe de $\mathcal{GA}(E)$.

Exercice 4 (Projections et symétries) Soit $A(1,-1,2)$ et $\overrightarrow{u}=(1,2,3)$. On note D la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ passant par A. Soit le P plan d'équation

$$P\colon x-y+2z=1\,.$$

a. Déterminer pour tout point $M(x_M,y_M,z_M)$ les coordonnées de l'image de M par la projection sur le (resp. la symétrie par rapport au) plan P parallèlement à D.
b. Même question si l'on remplace $\overrightarrow{u}$ par le vecteur $\overrightarrow{v}=(3,-1,2)$. (Attention, il y a un piège !)

Exercice 5 (Coordonnées cartésiennes et barycentriques) Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère les trois points $A(3,1), B(-1,2)$ et $C(0,-1)$.
a. Montrez que (A,B,C) est un repère affine de $\mathbb{R}^2$.
b. Déterminez les points P et Q de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées barycentriques dans (A,B,C) sont respectivement $(1/6,1/3,1/2)$ et $(1/2,1/4,1/4)$.
c. Quelles sont les coordonnées barycentriques dans (A,B,C) du point R de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées cartésiennes dans $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ sont $(2,1)$?
d. Donnez les coordonnées barycentriques dans (A,B,C) du barycentre G de $\{(P,1),(Q,2),(R,5)\}$.

Exercice 6 Soient abc un triangle, a' un point du segment $[bc]$, b' un point du segment $[ac]$ et c' un point du segment $[ab]$. On veut déterminer l'ensemble F des isobarycentres des points a', b' et c'.
a. Ecrire l'isobarycentre de a', b' et c' comme un barycentre de a, b et c.
Pour k égal à 1 ou 2, on pose :

$$a_k=b+\frac{k}{3}\overrightarrow{bc}\,, b_k=c+\frac{k}{3}\overrightarrow{ca}\,, \text{et } c_k=a+\frac{k}{3}\overrightarrow{ab}\,.$$

b. Montrer que F contient les points a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 et c_2.
c. Donner un encadrement des coordonnées d'un point g de F dans le repère affine (a,b,c). Montrez que F est contenu dans un hexagone (intersection de 6 demi-plans) que l'on dessinera.
d. Montrer que F est contenu dans l'enveloppe convexe C des points a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 et c_2.
e. Montrer que F est convexe et conclure.