Géométrie affine et euclidienne

Feuille d'exercice n° 1

2016-2017

Espaces affines

Exercice 1 On note E l'ensemble des (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $x+y+z = 1$ et $\overrightarrow{E}$ l'ensemble des (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $x + y + z = 0$.
a. Vérifiez que $\overrightarrow{E}$ est un espace vectoriel. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
b. On définit Φ de $E\times E$ dans $\mathbb{R}^3$ par $\Phi((x, y, z),(x', y', z') = (x'-x, y'-y, z'-z)$. Montrez que l'image de Φ est incluse dans $\overrightarrow{E}$ et que Φ définit sur E une structure d'espace affine dont l'espace vectoriel sous-jacent est $\overrightarrow{E}$.

Exercice 2 On généralise l'exercice **??**. En procédant de façon analogue définissez sur

$$E_n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\, , x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 1\}$$

une structure d'espace affine dont l'espace vectoriel sous-jacent est

$$\overrightarrow{E_n} = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\, , x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 0\}\, .$$

Exercice 3 (Milieu) Soient x et y deux points de E. Montrer que, pour un point z de E, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\text{(i) } \overrightarrow{xz} = \overrightarrow{zy}\, , \qquad \text{(ii) } 2\overrightarrow{xz} = \overrightarrow{xy}\, .$$

Montrer qu'un tel point existe et est unique, on l'appellera milieu de $\{x, y\}$.

Exercice 4 (Parallélogrammes) Montrer que, pour quatre points x, y, x' et y', les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\text{(i) } \overrightarrow{xy} = \overrightarrow{x'y'}\, , \quad \text{(ii) } \overrightarrow{xx'} = \overrightarrow{yy'}\, , \quad \text{(iii) Les milieux de } \{x, y'\} \text{ et } \{x', y\} \text{ coïncident.}$$

Si l'une de ces propriétés est vérifiée et si les vecteurs $\overrightarrow{xy}$ et $\overrightarrow{xx'}$ sont indépendants on dit que $xyy'x'$ est un parallélogramme.

Exercice 5 Soient E l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, polynomiales de degré inférieur ou égal à n, et E_1 l'ensemble des fonctions f de E telles que $\int_0^1 f(t)\,dt = 1$ et E_0 l'ensemble des fonctions f de E telles que $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.
a. Montrer que E et E_0 sont des espaces vectoriels (de dimension finie).
b.Soient f, g dans E_1 . Les éléments $f+g$, $f-g$, et $\frac{f+g}{2}$ sont-ils dans E_1 , dans E_0 ?
c. Montrer que E_1 peut-être muni d'une structure d'espace affine d'espace vectoriel sous-jacent E_0.

Exercice 6 On reprend l'exercice **??**. Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et t_v la translation de R^3 correspondante.
a. Si p est un point de E, montrez : $T_v(p) \in E$ si et seulement si $v \in \overrightarrow{E}$.
b. Lorsque $v \in \overrightarrow{E}$, il existe une translation t_v^E de E dans E définie par la structure d'espace affine sur E (d'espace vectoriel sous-jacent $\overrightarrow{E}$). Vérifiez que t_v^E est la restriction de t_v à E.

Exercice 7 a. Dans l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ des matrices $n \times n$ sur $\mathbb{R}$, on considère le sous-ensemble :

$$V = \{A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})\,, \forall i = 1, \ldots, n \sum_{j=1}^{n} ai, j = 0 \text{ et } , forallj = 1, \ldots, n \sum_{i=1}^{n} ai, j = 0\}\,.$$

Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$. Quelle est la dimension de V ?
b. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de sa structure canonique d'espace affine. Posons

$$F = \{A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})\,, \forall i = 1, \ldots, n \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 \text{ et } \forall j = 1, \ldots, n \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1\}\,.$$

Montrer que F est un sous-espace affine de $M_n(\mathbb{R})$ dont on précisera la direction.

Exercice 8 Dans $\mathbb{R}^2$, soit D l'ensemble des couples (x, y) qui vérifient $2x + 3y = 0$. On dit que $2x + 3y = 0$ est une équation de D.
a. Montrez que D est une droite vectorielle de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ et une droite affine de l'espace affine R^2 vérifiant $\overrightarrow{D} = D$.
b. Donnez un point a du sous-ensemble F d'équation $2x + 3y = 2$. Montrez que, si les points b et c sont dans F alors le vecteur $\overrightarrow{bc}$ appartient à D.
c. Montrez que F est le sous-espace affine $a + D$ de $\mathbb{R}^2$, image de D par une translation. Déterminez les vecteurs de deux translations qui conviennent. Trouvez-les toutes.

Exercice 9 On reprend l'exercice **??**. On considère la partie V de E_1 formée des polynômes divisibles par $(x-1)^2$.
a. Montrez que V est sous-espace affine de E_1 . Quelle est sa direction ?
b. Dans le cas $n = 4$. Donner un système d'équations cartésiennes de V dans la base B de E. En déduire que V est un plan de E.

$$B = \left\{(x-1)^4, (x-1)^3, (x-1)^2, (x-1), 1\right\}$$

Exercice 10 Soient $a_0, \dots, a_n$ et b des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, a_n ne s'annulant jamais.
a. Montrer que l'ensemble des fonctions y au moins n fois dérivables, solutions de l'équation différentielle linéaire
$$\sum_{k=0}^{k=n} a_k(t).y^{(k)}(t) = b(t)$$
est un sous-espace affine (non vide) de l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont le sous-espace vectoriel sous-jacent est l'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène associée.
b. Montrer qu'une solution particulière de l'équation est un point de ce sous-espace affine.

Exercice 11 Soient a et b deux réels. Montrer que les suites de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_{n+1} = au_n + b$ forment un sous-espace affine de l'espace des suites de réels.

Exercice 12 Soient a, b et c trois points distincts de l'espace affine $\mathbb{R}^3$. Déterminer $\operatorname{Aff} A$ quand

1. $A = \{a, b\}$
2. $A = \{a, b, c\}$ et a, b et c sont alignés
3. $A = \{a, b, c\}$ et a, b et c ne sont pas alignés.

Conclusion : Par deux points a et b distincts passe une et une seule droite que l'on notera (ab). Par trois points non alignés passe un et un seul plan noté (abc).

Exercice 13 On reprend l'exercice **??**. Montrez que E est le sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ engendré par
$$a = (1, 0, 0)\,, \quad b = (0, 1, 0)\,, \quad c = (0, 0, 1)\,.$$

Exercice 14 Soient a, b, a', b' des points d'un espace affine E. On suppose que a, a', b sont affinement indépendants (c'est-à-dire que les vecteurs $\overrightarrow{aa'}$ et $\overrightarrow{ab}$ sont linéairement indépendants). Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
— $abb'a'$ est un parallélogramme
— $\overrightarrow{ab'} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{aa'}$
— Les droites (ab) et $(a'b')$ ainsi que (aa') et (bb') sont parallèles.
Exprimer les propriétés caractéristiques du parallélogramme (sans oublier celle des milieux) dans le langage de la géométrie (faire un dessin).

Exercice 15 (Sous-espace affine engendré par deux droites)
a. Déterminer le sous-espace affine engendré par deux droites affines.
b. Trouver un système d'équations cartésiennes du sous-espace affine engendré dans $\mathbb{R}^4$ par les deux droites
$$D_1 = \{(1, 0, 0, 0) + t(1, 1, 1, 1)\,;\, t \in \mathbb{R}\} \text{ et } D_2 = \{(0, 1, 0, 0) + t(1, 0, 1, 0)\,;\, t \in \mathbb{R}\}$$

c. Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, on considère les droites D et D' d'équations :

$$D : \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+3y-4z & = & -1 \\ x-2y+z & = & 3 \end{array} \right. \quad , \quad D' : \left\{ \begin{array}{rcl} 11x-y-7z & = & \alpha \\ x+y+z & = & 1 \end{array} \right.$$

— Les droites sont-elles parallèles, sécantes ou non-coplanaires ?
— Pouvez-vous donner un système d'équations de D comprenant une des équations données pour D' ?
— Donner un système d'équations cartésiennes du sous-espace affine engendré dans $\mathbb{R}^3$ par les deux droites.

Exercice 16 On généralise l'exercice **??**. Soient V et W deux sous-espaces affines d'un espace affine E et T le sous-espace affine engendré par leur réunion.
a. Montrer, pour tout a de V et b de W , l'égalité : $T = V + W + \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{ab}\}$.
b. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
— $V \cap W$ est non vide
— Il existe $a \in V$ et $b \in W$ tels que le vecteur $\overrightarrow{ab}$ appartienne à $V + W$.
— Pour tout $a \in V$ et tout $b \in W$, le vecteur $\overrightarrow{ab}$ appartient à $V + W$.
c. En déduire que l'on a

$$\dim T = \left\{ \begin{array}{ll} \dim(V+W)+1 & \text{si } V \cap W = \emptyset \\ \dim(V+W) & \text{sinon}\,. \end{array} \right.$$