Université de Lorraine - Metz | **Année 2019 - 2020**

UFR MIM | **Licence de Mathématiques, L2**

Géométrie affine, feuille 2

1 Transformations affines

Exercice 1.1. Montrer que dans un triangle quelconque, l'homothétie de centre le centre de gravité et de rapport $-1/2$ change la hauteur issue d'un sommet en la médiatrice du côté opposé. En déduire que le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit sont alignés (sur une droite que l'on appelle *droite d'Euler*).

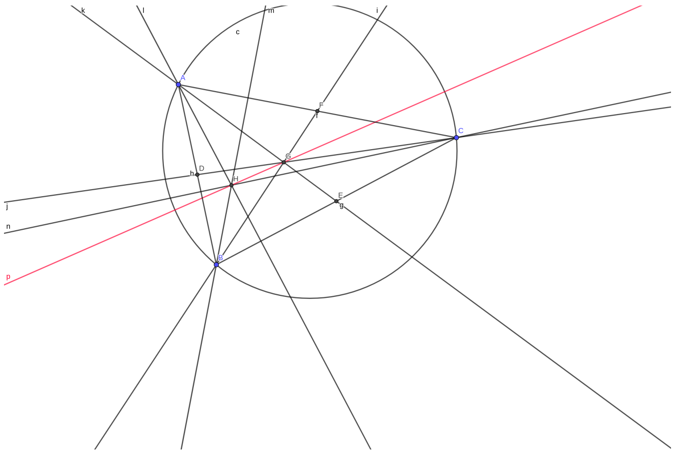

Figure 1: Le centre du cercle est sur la droite rouge

Exercice 1.2. Donner un exemple d'application affine du plan sans point fixe qui n'est pas une translation.

Exercice 1.3. Donner des exemples d'applications affines du plan qui préservent :

1. les angles (en valeur absolue)
2. les angles, mais aussi le sens des aiguilles d'une montre.
3. les distances,
4. les directions (une droite est changée en une droite parallèle).

2 Angles et orientation

Exercice 2.1. Dans l'espace, cela a t-il un sens de dire que deux droites coplanaires sécantes font entre elles un angle de $+\pi/3$?

Pourquoi ce met-on pas au milieu des halls de gare des horloges transparentes visibles des deux côtés ?

Figure 2: Horloge suspendue au milieu du Hall de la gare de l'Est. Elle est en fait double.

Exercice 2.2. Dans l'espace, cela a t-il un sens de dire que deux droites coplanaires sécantes font entre elles un angle de $\pm\pi/3$?

Exercice 2.3. L'angle que Vénus fait avec le soleil ne dépasse jamais 44 degrés. En déduire le rapport $\frac{d(Venus,Soleil)}{d(Terre,Soleil)}$. (On considèrera que les planètes ont des orbites circulaires autour du soleil)

Exercice 2.4. Démontrer simplement que la somme des angles d'un triangle fait π. Que fait la somme des angles d'un quadrilatère non croisé ? Généraliser à un polygône quelconque du plan.

Exercice 2.5. Une pénalité va être tirée au rugby. Le buteur voit l'espace entre les poteaux avec un angle de 10 degrés. Où est-il posible qu'il soit ?

Exercice 2.6. La forme de la salle de l'Opéra Garnier vous paraît-elle logique ?

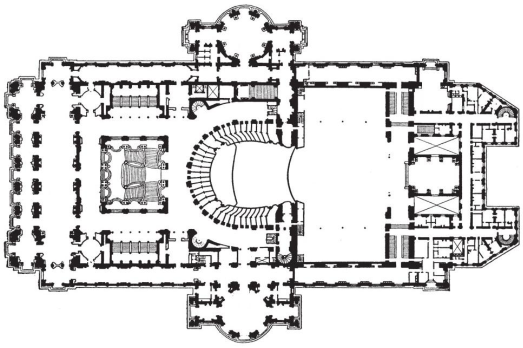

Figure 3: Opéra Garnier

3 Les symétries et autres transformations du plan

Exercice 3.1. On se place dans le plan affine. Par "symétrie", dans cet exercice, on veut dire "symétrie par rapport à une droite", appelée "droite directrice".

1. Montrer que toute rotation est la composée de deux symétries.
2. Celles-ci sont elles-uniques ? Où se coupent leurs deux droites directrices ?

3. En déduire que la composée de deux rotations est une rotation.

4. Montrer que toute translation est la composée de deux symétries.

5. Celles-ci sont elles-uniques ? Se coupent-elles ?

6. En déduire que la composée d'une rotation avec une translation est une rotation à nouveau.

Exercice 3.2. SoitABC un triangle non plat, et soient A', B', C' trois points situés sur les droites (BC), (CA) et (AB) respectivement. On les suppose distincts des sommets A, B et C.

1. (Théorème dit *de Ménélaüs*). Montrer que les points A', B', C' sont alignés si et seulement si :
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

2. (Théorème dit *de Ceva*). Montrer que les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes si et seulement si :
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

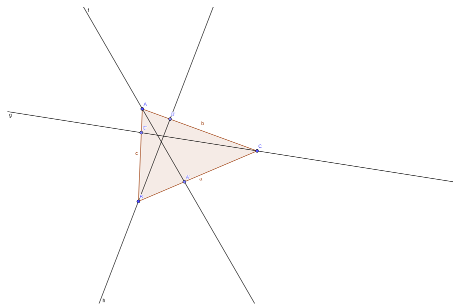

Figure 4: Le théorème de Ceva.

Exercice 3.3. (à faire à la maison) Faire une recherche (Wikipedia suffira...) pour chercher :

1. Un énoncé clair du théorème de Pappus,

2. Une démonstration de celui-ci à l'aide du théorème de Menelaüs (cf Exercice 3.2). (Au moins dans le cas où aucune des paires de droites requise dans la construction n'est parallèle).

4 Règle et compas

Exercice 4.1. Sur une feuille, on a tracé deux droites, qui se coupent en un point Ω, lequel se trouve malheureusement en dehors de votre feuille. Considérons un point A de votre feuille. Peut-on construire malgré tout la droite $(A\Omega)$?

Exercice 4.2. Deux droites se coupent hors de la feuille en un point I. Soit A un point de la feuille. Tracer la droite (AI).

Exercice 4.3. Supposons que l'on sache construire des segments de longueur x et y à la règle et au compas.

1. Montrer qu'on saura alors construire:

$$x + y, x - y, x/y, xy, \sqrt{x}.$$

2. En déduire que les distances constructibles à la règle et au compas sont le plus petit corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée.

Exercice 4.4. *Construction d'un pentagone régulier à la règle et au compas.*

- Tracer un carré $ABCD$. Placer E milieu de $[CD]$.
- Tracer le cercle Γ de centre O et de rayon OE inscrit dans ce carré.
- Construire T l'unique point de la demi-droite $[DC)$ tel que: $ET = EB$.
- Construire I le milieu de $[DT]$.
- Construire le triangle OHE isocèle en H tel que: $OH = DI$. La droite (OH) coupe le cercle Γ en un point que l'on appellera M.

Montrer que la distance EM est la longueur des côtés d'un pentagone inscrit dans Γ .

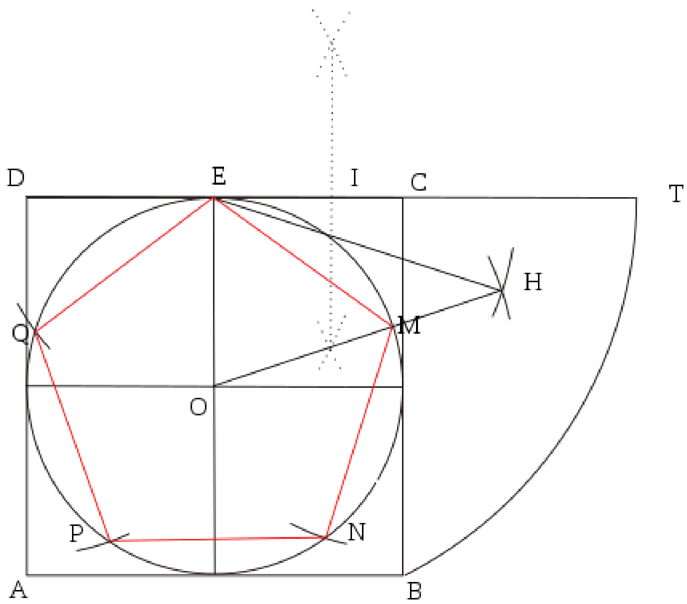

Figure 5: Image Wikipedia.

5 Géométrie du cercle

Exercice 5.1. On considèrera que la terre est une sphère parfaite. Quelle est la distance maximale à laquelle un phare de hauteur h peut-être vu ? Si on veut qu'il soit vu de 2 fois plus loin, suffit-il de le réaliser deux fois plus haut ? Quatre fois plus haut ?

Exercice 5.2. *Puissance d'un point par rapport à un cercle.* On va montrer que la quantité:

$$|MP||MD|$$

où P, D sont les points d'intersections d'une droite $\mathcal{D}$ passant par M avec $\mathcal{C}$ ne dépend pas de la droite $\mathcal{D}$. On appelle puissance du point M cette quantité.

Soit M un point extérieur à un cercle $\mathcal{C}$. Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ deux droites passant par M et coupant le cercle en P_1, D_1 et p_2, D_2 respectivement.

1. Montrer que les triangles MP_1D_2 et MP_2D_1 sont semblables.

2. Conclure.

3. Que se passe t-il si M est intérieur à $\mathcal{C}$?

4. Exprimer la puissance du point M en fonction de la distance entre M et le centre du cercle et le rayon de celui-ci.

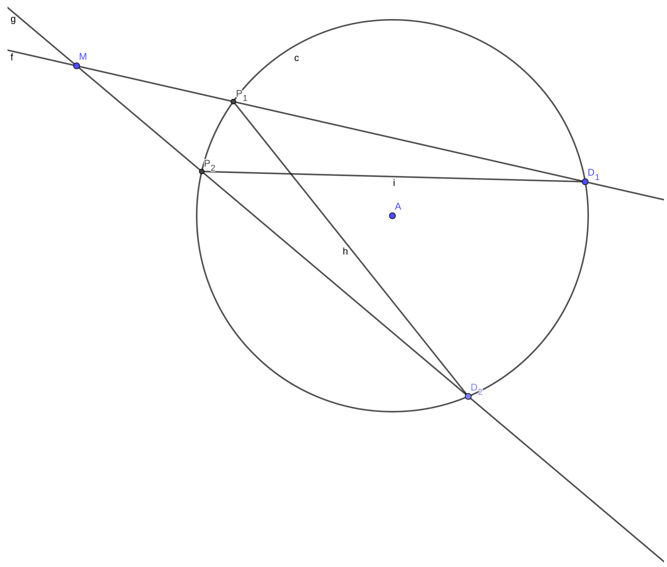

Figure 6: Chercher deux triangles semblables dans la figure ci-dessus

Exercice 5.3. On va montrer que dans un billard triangulaire quelconque dont les trois sommets sont aigus, si on place une boule au pied d'une des hauteurs, et que l'on vise le pied d'une autre hauteur, la boule va revenir à son point de départ, après avoir rébondi au pied de la troisième hauteur *triangle orthique.*

Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus et A', B', C' les bases des hauteurs issues de A, B, C.

1. Montrer que quadrilatères $AA'BB', BB'CC', CC'AA'$ sont cocycliques

2. Utiliser le théorème de l'angle inscrit pour en déduire que les angles $\widehat{AA'B'}$ et $\widehat{AA'C'}$ sont égaux (au signe près).

3. Conclure.

.

Exercice 5.4. Soient O le centre d'un cercle $\mathcal{C}$ et A, B, C trois points sur ce cercle, situés dans cet ordre dans un quart de cercle donné. Soit A' et B' les projections de C sur $[OA]$ et $[OB]$ respectivement. Montrer que l'angle $\widehat{A'CB'}$ est égal à l'angle $\widehat{AOB}$.

Démontrer que $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$ en utilisant uniquement les propriétés des triangles semblables. On supposera $0 < a, b < \frac{\pi}{4}$ pour simplifier.

Exercice 5.5. (*Théorème de Ptolémée*) "Le produit des diagonales d'un quadrilatère non-croisé inscrit dans un cercle est égal à la somme des produits des côtés opposés."

Soit $ABCD$ un tel quadrilatère. On veut montrer que :

$$|AC| \times |BD| = |AB| \times |CD| + |AD| \times |BC|.$$

1. Soit E un point de $[AC]$ tel que $\widetilde{ABE} = \widetilde{DBC}$. Montrer que ABE et DBC sont des triangles semblables, ainsi que ADB et ECB.
2. En déduire de résultat en utilisant $|AC| = |AE| + |EC|$.
3. Que dit ce théorème lorsque $ABCD$ est un rectangle ?
4. (A l'aide d'une source extérieure), retrouver les formules de trigonométrie usuelle à l'aide de ce théorème.

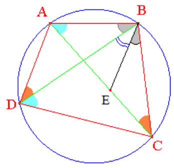

Figure 7: Tiré de la très riche page de Serge Mehl

6 Similitudes et nombres complexes

Exercice 6.1. On considère l'application de $\mathbb{C}$ dans lui-même donnée par :

$$z \mapsto 3z - 5$$

Décrire cette application comme la composée d'une rotation et d'une homothétie.

On considère l'application de $\mathbb{C}$ dans lui-même donnée par :

$$z \mapsto 3\overline{z} - 5.$$

Décrire géométriquement cette opération.

Exercice 6.2. Redémontrer les items 3 et 5 de l'exercice 3.1 en écrivant les rotations et translations avec des nombres complexes.

Exercice 6.3 (*Point de Fermat*). Soit ABC un triangle, et dont les angles sont aigus. Soient A', B', C' les sommets de triangles équilatéraux dont $[BC], [CA], [AB]$ sont des côtés, et situés à l'extérieur du triangle.

1. En utilisant des rotations d'angle $\pi/3$ bien choisies, montrer que les segments $[AA'], [BB'], [CC']$ sont de même longueur.

2. Exprimer le point d"intersection des droites $(AA'), (BB')$ en fonction des affixes des points A, B, C. Montrer que l'expression est symétrique en ces trois affixes.

3. En déduire que les droites (AA'), (BB'), et (CC') sont concourantes en un point appelé *point de Fermat*.

4. Montrer que le point de Fermat est le point M qui minimise la somme $|MA|+|MB|+|MC|$.

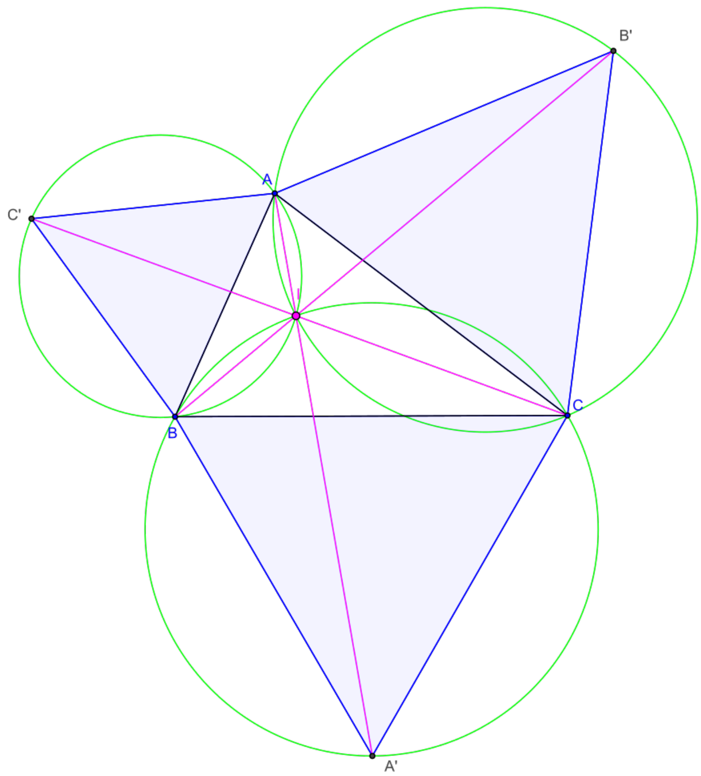

Figure 8: Tiré de Wikipedia. Ce dessin devrait vous inspirer une autre preuve, purement géométrique, avec des angles...

Exercice 6.4. A propos, qui étaient Ceva et Menelaüs, Desargues, Fermat ?