Université de Lorraine - Metz | **Année 2019 - 2020**
UFR MIM | **Licence de Mathématiques, L2**

Géométrie affine

1 Autour des barycentres

Exercice 1.1. On se place dans un espace affine E quelconque. On appelle *enveloppe convexe* de n points $A_1, \dots, A_n \in N$ l'ensemble des barycentres de ces n poids à poids strictement positifs. On note $\mathrm{C}onv(A_1, \dots, A_n)$ cet ensemble.

1. Qu'est ce que l'enveloppe convexe de 2 points ?
2. et de 3 points ?
3. Montrer que l'enveloppe convexe est un ensemble convexe. (On rappelle qu'un ensemble C est convexe si et seulement si pour tout $A, B \in C$ et le segment $[A, B]$ est dans C).
4. Montrer que $\mathrm{C}onv(A_1, \dots, A_n)$ est l'union des segments de la forme $[A_nM]$ où $M \in \mathrm{C}onv(A_1, \dots, A_{n-1})$.

Exercice 1.2. On se place dans un espace affine E quelconque.

1. Soit C une partie de E. Montrer qu'elle est convexe (voir exo 1.1) si et seulement si le barycentre à coefficients positifs de n points dans C est encore dans C.
2. L'intersection de deux convexes est-elle convexe ?
3. L'intersection d'une infinité de convexes est-elle convexe ?
4. L'union de deux convexes est-elle convexe ?
5. Dans le cas $E = \mathbb{R}$, caractériser toutes les parties convexes.
6. L'image par une application affine $\phi \colon E \to F$ d'un convexe de C est-elle une partie convexe de F ? Qu'en est-il de l'image réciproque d'une partie convexe de F ?
7. Reprendre les deux questions précédentes si l'application ϕ n'est pas affine.

Exercice 1.3. On se place dans le plan. On prend trois points A, B, C non-alignés. Les trois droites $(AB), (AC), (BC)$ découpent le plan en 7 zones comme dans le dessin ci-dessous).

1. On considère le barycentre de A, B, C avec les poids λ, μ, ν. Discuter selon les signes de λ, μ, ν de la zone dans laquelle se trouve ce barycentre.
2. Tout point du plan est-il de façon unique barycentre des points A, B, C ? Si non, quelle condition imposer sur λ, μ, ν pour que cela devienne vrai ?

Exercice 1.4. On va montrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes. Soit A, B, C un triangle. Soit G l'isobarycentre de A, B et C.

1. En utilisant le théorème d'associativité, montrer que G est sur la droite reliant A au milieu de $[BC]$.
2. Conclure.
3. Connaissez-vous une preuve qui n'utilise que les parallélogrammes et Thalès ? (Si non, la chercher !)

2 Le plan et l'espace

On dira désormais *droites* (resp. *plan*) pour *droite affine* (resp. *plan affine*).

Exercice 2.1. On dit que deux droites du plan sont *parallèles* lorsqu'elles ne se coupent pas ou qu'elles sont confondues.

1. Montrer que deux droites sont parallèles si et seulement si la première est l'image de la seconde par une translation.
2. Que dire des espaces vectoriels directeurs de deux droites parallèles ?
3. Ceci reste t-il vrai pour deux droites dans l'espace ?
4. Montrer que deux droites du plan :
   (a) ou bien sont parallèles,
   (b) ou bien se coupent en un et un seul point.

Ceci reste t-il vrai pour deux droites dans l'espace ? Essayer de donner un énoncé du même type.

Exercice 2.2. On dit que deux plans de l'espace sont parallèles lorsque leur intersection est vide ou qu'ils sont confondus.

1. Montrer que deux plans sont parallèles si et seulement si le premier est l'image du second par une translation.
2. Que dire des espaces vectoriels directeurs de deux plans parallèles ?
3. Ceci reste t-il vrai pour deux plans dans $\mathbb{R}^4$?
4. Montrer que deux plans de l'espace :
   (a) ou bien sont parallèles,
   (b) ou bien leur intersection est une droite.

Exercice 2.3. 1. Cherchez où vous voulez l'énoncé du théorème de Désargues, et faire le dessin.

2. Vérifiez sur Geogebra que cela a l'air vrai.

On va chercher à le démontrer comme ceci. Soit Ω un point de l'espace, et soient D_1, D_2, D_3 trois droites qui passent par Ω. On choisit A_1, A_2, A_3 et B_1, B_2, B_3 des triangles tels que A_i, B_i appartienne à D_i pour $i = 1, 2, 3$. Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ les plans définis par ces deux triangles.

1. On suppose que $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ne sont pas parallèles. Soit $\mathcal{D}$ leur droite d'intersection.
2. Montrer que les droites (A_1A_2) et (B_1, B_2) sont coplanaires. Montrer qu'elles se coupent en un point de $\mathcal{D}$.
3. Adapter le raisonnement dans le cas où les plans $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sont parallèles, et montrer que (A_1A_2) et (B_1, B_2) sont coplanaires et parallèles.
4. Comprendre le lien avec théorème de Desargues.

3 Application affine

Exercice 3.1.

1. Soit A_1, A_2 ujne paire de points distincts de la droite affine. Soit B_1, B_2 une autre telle paire de point de la droite affine. Montrer qu'il existe une et une seule application affine qui envoie A_1 sur B_1 et A_2 sur B_2.

2. Soient A_1, A_2, A_3 un triplet de points non-alignés du plan affine. Soit B_1, B_2, B_3 une autre telle paire de point de la droite affine. Montrer qu'il existe une et une seule application affine qui envoie A_1 sur B_1, A_2 sur B_2, et A_3 sur B_3.

3. Généraliser en dimension n - en particulier dans l'espace.