GÉOMÉTRIE AFFINE

Document de travail pour la préparation au CAPES

Version 2008

MARIE-CLAUDE DAVID
FRÉDÉRIC HAGLUND
DANIEL PERRIN
AVEC LA PARTICIPATION DE JACQUES CHAUMAT

MATHÉMATIQUE, BÂT. 425
UNIVERSITÉ PARIS-SUD
F-91405 ORSAY CEDEX.

MODE D'EMPLOI

Ce texte propose une présentation de la géométrie affine, c'est-à-dire de la partie de la géométrie que l'on apprend au collège et au lycée et qui concerne les propriétés des droites, plans, etc., (à l'exclusion des notions métriques : distance, angle). La différence essentielle avec ce que vous avez appris au lycée est qu'ici la géométrie s'appuie fondamentalement sur l'algèbre linéaire. La géométrie affine est une question peu abordée dans les cours de DEUG et de licence mais elle figure au programme de l'écrit du CAPES et elle peut avoir une grande importance dans les problèmes.

Vous devez considérer ce polycopié comme un document de **travail personnel**. Il comprend l'essentiel du cours de géométrie affine que vous devez maîtriser. Des commentaires sur les définitions et les résultats (repérés par un trait vertical et une typographie en italiques) vous aideront à faire le lien avec ce que vous connaissez déjà et à développer votre intuition des notions nouvelles, mais ce qui est nouveau restera pour vous abstrait (voire obscur) tant qu'un vrai travail ne vous l'aura pas rendu familier et concret.

Une méthode de travail logique que vous pouvez utiliser lorsque vous abordez un chapitre est la suivante :

• Procéder à une première lecture des énoncés et des commentaires qui vous donnera une vue d'ensemble de la partie à étudier.

• Passer à l'apprentissage proprement dit qui doit être actif, c'est-à-dire se faire crayon en main. Dans cette deuxième lecture, vous devez, pour chaque énoncé :

a) Dessiner des figures. C'est une habitude essentielle à prendre, en géométrie et cela vous permettra de faire le lien avec vos connaissances antérieures.

b) Comprendre le sens de l'énoncé, quitte à revenir en arrière pour revoir ce qui précède. En cas de difficulté, voir e).

c) Essayer de produire une démonstration avant de lire celle du polycopié. L'expérience montre en effet que cette première approche personnelle, même si elle a été infructueuse, vous permettra de mieux rentrer dans la démonstration des auteurs (et éventuellement de la critiquer).

d) Le texte est parsemé de ♠ qui sont autant d'invitations à réfléchir sur les définitions et les résultats qui viennent d'être énoncés. Vous devez donc réaliser le travail demandé dans ces ♠. Pour certains, des indications sont fournies à la fin du polycopié, mais vous ne devez vous y reporter qu'en dernier recours.

e) Si, dans cette lecture active, certains points vous paraissent encore obscurs, notez-les et posez les questions aux enseignants, elles seront les bienvenues.

• La troisième étape est d'aborder les exercices d'application ou de complément, notés ♣, ils testeront votre compréhension et vous permettront d'aller plus loin.

Enfin, les questions marquées d'un ♡ sont plus délicates mais elles vous mèneront au cœur des choses.

Au travail !

TABLE DES MATIÈRES

I. ESPACES AFFINES

> *Dans ce chapitre on développe la théorie des espaces affines abstraits (de dimension finie), qui permet notamment de traiter les problèmes géométriques d'alignement, de concourance et de parallélisme. L'intérêt majeur de cette présentation de la géométrie réside dans l'utilisation de l'outil simple et puissant que fournit* **l'algèbre linéaire**. *C'est le fil conducteur qui guide ce texte. L'objectif est d'appliquer cette théorie aux cas "concrets" du plan et de l'espace (les plus importants pour le CAPES). Aussi, en travaillant ce cours, il est essentiel d'illustrer les définitions et théorèmes dans le plan et l'espace : faites des dessins, encore des dessins, toujours des dessins !*

1. ESPACE AFFINE

Dans tout le texte, $\vec{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1.1. **Définition.** *Un* **espace affine d'espace vectoriel sous-jacent** $\vec{E}$ *consiste en la donnée d'un ensemble E non vide et d'une application Φ de $E\times E$ dans $\vec{E}$ qui à un couple (x,y) de E associe un vecteur noté $\overrightarrow{xy}$ et qui vérifie*

1) $\forall (x,y,z)\in E^3 \quad \overrightarrow{xy}+\overrightarrow{yz}=\overrightarrow{xz}$ *(relation de Chasles).*

2) Pour tout point a de E, l'application Φ_a définie de E dans $\vec{E}$ par

$$\Phi_a(x)=\Phi(a,x)=\overrightarrow{ax}$$

est une bijection de E dans $\vec{E}$.

La **dimension** *de l'espace affine E est par définition celle de l'espace vectoriel sous-jacent $\vec{E}$.*

> *Il y a deux types d'objets en jeu : les éléments de E (appelés points et notés $a,b,x,y,...$) et ceux de $\vec{E}$ (appelés vecteurs et notés $\vec{v},...$). En général, dans ce texte, on munit de flèches tout ce qui est vectoriel et on réserve les majuscules aux parties de E ou $\vec{E}$. Vous verrez que c'est une notation cohérente et commode. Cependant, comme ce n'est pas la coutume de l'enseignement secondaire, il est peut-être préférable, à l'oral du CAPES, d'utiliser des notations plus standard et de noter A,B les points de l'espace affine et $\overrightarrow{AB}$ les vecteurs.*
>
> *En fait, la définition précédente est également valable pour un espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ de dimension quelconque (finie ou non), sur un corps quelconque.*

1.2. **Exemple test.**

1.2.1. ♠. On note E l'ensemble des (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $x+y+z=1$ et $\vec{E}$ l'ensemble des (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $x+y+z=0$.

a. Vérifiez que $\vec{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

b. On définit Φ de $E\times E$ dans $\mathbb{R}^3$ par $\Phi\big((x,y,z),(x',y',z')\big)=(x'-x,y'-y,z'-z)$. Montrez que $\Phi(E\times E)$ est inclus dans $\vec{E}$ et que Φ définit sur E une structure d'espace affine dont l'espace vectoriel sous-jacent est $\vec{E}$.

> *Tout au long de ce document de travail, vous pourrez tester votre assimilation du cours par certains exercices où l'espace ambiant sera toujours le plan affine E ci-dessus. Ceci vous permettra d'avoir un exemple familier pour illustrer efficacement les définitions et les théorèmes.*

1.3. $\heartsuit$**. Généralisation.** En procédant de façon analogue à 1.2.1 définissez sur $E_n = \{(x_0, x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 1\}$ une structure d'espace affine dont l'espace vectoriel sous-jacent est $\vec{E}_n = \{(x_0, x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.

1.4. **Premières propriétés.**

1.4.1. $\spadesuit$. Ecrivez la relation de Chasles pour obtenir :
$\forall x \in E, \overrightarrow{xx} = \vec{0}$ et $\forall (x,y) \in E^2, \overrightarrow{xy} = -\overrightarrow{yx}$

1.4.2. $\spadesuit$. *Milieu.* Soient x et y deux points de E. Montrer que, pour un point z de E, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(i)\ \overrightarrow{xz} = \overrightarrow{zy} \qquad \text{et} \qquad (ii)\ 2\overrightarrow{xz} = \overrightarrow{xy}$$

Montrer qu'un tel point existe et est unique, on l'appellera **milieu** de $\{x, y\}$.

1.4.3. $\clubsuit$. Montrer que, pour quatre points x, y, x' et y', les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{x'y'}$

(ii) $\overrightarrow{xx'} = \overrightarrow{yy'}$

(iii) Les milieux de $\{x, y'\}$ et $\{x', y\}$ coïncident.

Si l'une de ces propriétés est vérifiée et si les vecteurs $\overrightarrow{xy}$ et $\overrightarrow{xx'}$ sont indépendants on dit que $xyy'x'$ est un **parallélogramme**. Si $\overrightarrow{xy}$ et $\overrightarrow{xx'}$ ne sont pas indépendants, on dit que $xyy'x'$ est un **parallélogramme aplati**.

1.4.4. $\heartsuit$. L'application Φ définit une relation d'équivalence sur $E \times E$:

$$(a,b) \sim (a',b') \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(a,b) = \Phi(a',b') \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{a'b'}$$

C'est la relation d'équipollence entre bipoints (i.e. couples de points).

1.4.5. $\heartsuit$. Montrer que, si la propriété (1) est vérifiée, la propriété (2) de la définition est équivalente à : (2') il existe un point a_0 de E tel que Φ_{a_0} est une bijection.

1.5. **Exemple fondamental.** On peut munir un espace vectoriel $\vec{E}$ d'une stucture d'espace affine, d'espace vectoriel sous-jacent $\vec{E}$ lui-même, dite **structure affine canonique** : Φ est l'application de $\vec{E} \times \vec{E}$ dans $\vec{E}$ définie par $\overrightarrow{uv} = \Phi(u,v) = v - u$.

Sans autre précision, un espace vectoriel sera toujours muni de sa structure affine canonique.

1.5.1. $\spadesuit$. Vérifier (1) et (2) pour Φ. Précisez Φ_0 et l'application réciproque de Φ_u.

Comme espace vectoriel, on peut prendre en particulier $\vec{E} = \mathbb{R}^2$ ou $\vec{E} = \mathbb{C}$, puis $\vec{E} = \mathbb{R}^n$, munis de leur structure canonique de $\mathbb{R}$-espace vectoriel (dans $\mathbb{R}^n$, l'addition et la multiplication par un scalaire se font coordonnée par coordonnée).

1.5.2. $\spadesuit$. Lorsque $E = \mathbb{R}^3$, calculer $\Phi((2,-1,0),(1,1,-1))$.

> *Nous verrons plus loin que tous les espaces affines de dimension 2 (resp. n) sont isomorphes à $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^n$).*

1.5.3. $\triangle$. *Commentaire et avertissement.* Ici, il faut faire bien attention. Sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$, on considère **deux** structures différentes : la structure (canonique) d'espace vectoriel et la structure (canonique) d'espace affine. Ainsi, un **élément** de l'ensemble $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire un couple (x,y) de nombres réels) peut être considéré tantôt comme un **vecteur**, tantôt comme un **point** : tout dépend de la structure qu'on veut considérer à ce moment là. Si on considère $\mathbb{C}$ au lieu de $\mathbb{R}^2$, on a en plus une structure de corps : les éléments peuvent donc aussi être considérés comme des **scalaires**.

Notez qu'on peut encore considérer beaucoup d'autres structures sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}$: par exemple la structure d'espace topologique, la structure d'espace métrique (pour la distance euclidienne par exemple) etc... La différence se verra surtout quand on introduira des applications entre ces espaces. Par exemple une translation sera une application affine, c'est-à-dire une bonne application vis à vis de la structure d'espace affine, mais pas une application linéaire, donc pas une bonne application pour la structure vectorielle.

> *À l'école élémentaire, les enfants, avec leurs crayons, leurs règles et leurs compas, font de la géométrie sur un plan* **physique concret** *: la page du cahier et on se contente de leur faire constater empiriquement certaines propriétés des figures. Plus tard, au collège, on commence à donner des embryons de preuves de ces propriétés, mais en partant d'un corpus d'axiomes encore mal définis.*

> *À la fin du collège et au lycée on introduit les coordonnées et les vecteurs. Sans le dire clairement, on fournit alors aux élèves un modèle* **mathématique abstrait** *de la géométrie. Ce modèle, c'est $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure canonique d'espace affine (en fait, on ajoute la structure euclidienne : le produit scalaire, ce qui permet de modéliser aussi les distances et les angles). Dans ce modèle qui repose sur les axiomes des espaces vectoriels (et, plus en amont, des ensembles), toutes les notions (points, droites) sont bien définies, tous les théorèmes, tous les postulats, plus ou moins admis au collège, peuvent être démontrés rigoureusement. En fait, on peut aussi donner une présentation axiomatique directe de la géométrie à partir des notions de points, droites, etc, à la manière d'Euclide ou, plus récemment, de Hilbert, mais c'est nettement plus compliqué, comme on s'en convaincra en allant regarder le livre de David Hilbert, Les fondements de la géométrie, Dunod, 1971.*

1.6. $\heartsuit$**. Vectorialisation d'un espace affine.** Nous avons vu en 1.5 que tout espace vectoriel donne naissance à un espace affine. Mais cet espace possède un point particulier : le vecteur $\vec{0}$. Au contraire, dans un espace affine général E aucun point n'est privilégié par rapport aux autres : on pourrait dire que la géométrie affine est de la géométrie vectorielle *sans origine a priori*.

Cependant on peut quand même selon les besoins de la cause choisir un point ω comme **origine** de E. Cela permet de **vectorialiser** E **en** ω, c'est à dire d'identifier le point a de E avec le vecteur $\overrightarrow{\omega a}$ de $\vec{E}$, la bijection réciproque associant au vecteur $\vec{u}$ le point $\omega + \vec{u}$ (la bijectivité vient de l'axiome 2) des espaces affines).

> *Vectorialiser un espace affine E en une origine convenablement choisie permet de ramener un problème affine à un problème équivalent dans $\vec{E}$, où l'on dispose de tous les outils de l'algèbre linéaire : c'est une méthode très fréquemment utilisée.*

1.7. **D'autres espaces affines.**

1.7.1. $\clubsuit$. Soient E l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, polynomiales de degré inférieur ou égal à n, E_1 l'ensemble des fonctions f de E telles que $\int_0^1 f(t)dt = 1$ et E_0 l'ensemble des fonctions f de E telles que $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

a. Montrer que E et E_0 sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.

b. Soient f, g dans E_1. Les éléments $f+g$, $f-g$, $\frac{f+g}{2}$ sont-ils dans E_1, dans E_0 ?

c. Montrer que E_1 peut-être muni d'une structure d'espace affine d'espace vectoriel sous-jacent E_0.

1.7.2. Voir aussi, en 3.7, l'exemple (fondamental) de l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires et en 3.8 le cas d'une équation différentielle linéaire.

2. Translations

2.1. **Notations.** D'après la propriété (2) de la structure d'espace affine, pour tout point a de E et tout vecteur $\vec{v}$ de $\vec{E}$, il existe un unique point b de E tel que $\overrightarrow{ab}=\vec{v}$. On **note** $a+\vec{v}$ ce point b, c'est-à-dire qu'on a :

$$b=a+\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{ab}=\vec{v}.$$

On peut donc écrire : $a+\overrightarrow{ab}=b$.

2.1.1. ♠. Les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont des couples de réels, on considère un point $a=(a_1,a_2)$ du **plan affine** $\mathbb{R}^2$ et un vecteur $\vec{v}=(v_1,v_2)$ du **plan vectoriel** $\mathbb{R}^2$, écrivez le point $a+\vec{v}$ comme un couple de réels en utilisant la définition de la structure affine canonique.

2.1.2. △. *Attention ! On a défini la somme d'un point et d'un vecteur comme un certain point : le $+$, ici, n'est pas le $+$ de l'espace vectoriel (un problème analogue se pose dans les espaces vectoriels, où il y a une multiplication interne des scalaires entre eux et une multiplication externe des scalaires par les vecteurs : les deux opérations sont notées "."). Heureusement, il n'y a pas de confusion possible, en effet :*

2.1.3. ♠. Si $\vec{E}$ est un espace vectoriel muni de sa structure d'espace affine canonique, la somme d'un point u et d'un vecteur v est le point w tel que $v=\overrightarrow{uw}=w-u$, c'est donc le point $w=u+v$ égal à la somme, dans l'espace vectoriel, des deux vecteurs correspondants au point et au vecteur dont on fait la somme (voir le cas particulier 2.1.1). La notation $+$ est donc cohérente.

2.1.4. ♠. Montrez :

$$b=a+\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \forall c\in E\ \overrightarrow{cb}=\overrightarrow{ca}+\vec{v}.$$

Cette caractérisation de la somme d'un point et d'un vecteur est importante, elle signifie que l'égalité entre points " $b=a+\vec{v}$ " se transforme en une égalité vectorielle après le choix d'une origine c.

2.1.5. ♠. Montrez, pour tous $a,b\in E$ et tous $\vec{u},\vec{v}\in\vec{E}$ les formules :

$$(a+\vec{u})+\vec{v}=a+(\vec{u}+\vec{v}) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{(a+\vec{u})(b+\vec{v})}=\vec{v}+\overrightarrow{ab}-\vec{u}.$$

N'oubliez pas de faire un dessin.

2.2. **Définition.** *Soit E un espace affine d'espace vectoriel sous-jacent $\vec{E}$ et $\vec{v}$ un vecteur de $\vec{E}$; on appelle translation de vecteur $\vec{v}$ l'application $t_{\vec{v}}$ de E dans E définie par $t_{\vec{v}}(a)=a+\vec{v}$.*

On note $T(E)$ l'ensemble des translations de E et T l'application de $\vec{E}$ dans $T(E)$ qui au vecteur $\vec{v}$ associe la translation $t_{\vec{v}}$.

Si on pose $b=t_{\vec{v}}(a)$ pour un point a donné, cela revient à dire qu'on a $\overrightarrow{ab}=\vec{v}$, le vecteur d'une translation est donc uniquement déterminée par l'image d'un point particulier, ceci implique que T est une bijection.

2.2.1. ♠. Soient a et b deux points de E, t une translation et a', l'image de a par t ; exprimez $t(b)$ en fonction de a, b et a'.

2.2.2. ♠. On reprend l'exemple test (1.2.1). Soit $\vec{v}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{T}_{\vec{v}}$ la translation de $\mathbb{R}^3$ correspondante (à définir ?).

a. Si p est un point de E, montrez : $\mathcal{T}_{\vec{v}}(p) \in E \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \in \vec{E}$.

b. Lorsque $\vec{v} \in \vec{E}$, il existe une translation $t_{\vec{v}}$ de E dans E définie comme en 2.2 par la structure d'espace affine sur E (d'espace vectoriel sous-jacent $\vec{E}$). Vérifiez que $t_{\vec{v}}$ est la restriction de $\mathcal{T}_{\vec{v}}$ à E.

2.3. **Proposition.** *L'ensemble $T(E)$ des translations de E muni de la loi $\circ$ de composition des applications est un groupe commutatif*[1] *isomorphe au groupe additif $(\vec{E},+)$.*

Démonstration. Nous allons commencer par calculer $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$ pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\vec{E}$. Soit a un point de E, on pose : $a' = t_{\vec{u}}(a)$ et $a'' = t_{\vec{v}}(a')$. Par définition, on a :

$$\overrightarrow{aa'} = \vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{a'a''} = \vec{v},$$

d'où on tire, grâce à la relation de Chasles : $\overrightarrow{aa''} = \vec{u} + \vec{v}$, c'est-à-dire :

$$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}(a) = a + (\vec{u} + \vec{v})$$

Cette relation, vraie pour tout point a de E, signifie que $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$, c'est-à-dire : $T(\vec{v}) \circ T(\vec{u}) = T(\vec{u}+\vec{v})$. L'application T de $(\vec{E},+)$ dans $(T(E),\circ)$ est donc un isomorphisme de groupe, on en déduit que $(T(E),\circ)$ est un groupe commutatif. □

2.3.1. ♠. Quel est son élément neutre ? Quel est l'inverse de $t_{\vec{u}}$?

2.3.2. ♠. *Remarque.* On dispose de trois bijections en lien avec les translations :

(i) Pour $\vec{v}$ donné, $a \mapsto t_{\vec{v}}(a)$ est une bijection de E.

(ii) Pour a donné, $\vec{v} \mapsto t_{\vec{v}}(a)$ est une bijection de $\overrightarrow{E}$ sur E.

(iii) Pour $\vec{v}$ donné, $\vec{v} \mapsto t_{\vec{v}}$ est une bijection de $\overrightarrow{E}$ sur $T(E)$.

3. Sous-espaces affines

3.1. **Proposition.** *Soient E un espace affine d'espace vectoriel sous-jacent $\vec{E}$ et V un sous-ensemble de E vérifiant la propriété : Il existe un point a de V tel que l'image directe $\Phi_a(V)$ soit un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$.*
(On rappelle qu'on a, par définition : $\Phi_a(V) = \{\overrightarrow{ax} \mid x \in V\}$.)
Alors pour tout b de V, $\Phi_b(V)$ est le même sous-espace vectoriel de $\vec{E}$ que $\Phi_a(V)$.

Démonstration.
Le sous-espace vectoriel $\Phi_a(V)$ contient le vecteur $\overrightarrow{ab}$ et donc l'ensemble $\{\overrightarrow{ax} - \overrightarrow{ab} \mid x \in V\}$, c'est-à-dire $\Phi_b(V)$.

Montrons maintenant l'autre inclusion. Soit un élément $\overrightarrow{ax}$ de $\Phi_a(V)$ (x est un point de V), posons $y = \Phi_b^{-1}(\overrightarrow{ax})$, nous avons donc $\overrightarrow{by} = \overrightarrow{ax}$. Alors le vecteur $\overrightarrow{ax}$ appartient à $\Phi_b(V)$ si et seulement si y est un point de V c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{ay}$ appartient à $\Phi_a(V)$. Comme $\Phi_a(V)$ est un sous-espace vectoriel, ce résultat est obtenu grâce à la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{ay} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{by} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ax}.$$

□

[1] $(G,\circ)$ est un groupe si :
i) $\circ$ est une loi de composition interne sur l'ensemble G ($a,b \in G \Rightarrow a \circ b \in G$)
ii) $\circ$ est associative ($(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ pour tous a,b,c de G)
iii) $\circ$ admet un élément neutre e ($e \circ a = a \circ e = a$ pour tout a de G)
iv) tout élément a de G a un symétrique a' dans G ($a \circ a' = a' \circ a = e$).
Le groupe est commutatif si la loi est commutative ($a \circ b = b \circ a$ pour tous a,b de G)

3.2. **Définition.** *Soit E un espace affine d'espace vectoriel sous-jacent $\vec{E}$. Un sous-ensemble non vide V de E est appelé un* **sous-espace affine** *s'il existe un point a appartenant à V tel que $\Phi_a(V)$ soit un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$. On dit alors que V est le sous-espace affine passant par a de direction $\vec{V} = \{\overrightarrow{ax} \mid x \in V\}$ ($\vec{V}$ ne dépend pas de a d'après la proposition précédente).*

Par définition de $\vec{V}$, on a $V = \{a + \vec{v} \mid \vec{v} \in \vec{V}\}$; on notera donc $V = a + \vec{V}$.

3.2.1. ♠. Montrer que l'espace E de l'exemple test (1.2.1) est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$.

3.3. **Remarques :**

3.3.1. Si V est un sous-espace affine de E, alors $\phi(V \times V)$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$. Montrer que la réciproque est fausse.

3.3.2. ♡. *Justification de l'appellation "sous-espace affine".* Soit E un espace affine de direction $\vec{E}$ et V un sous-espace affine de E de direction $\vec{V}$. Montrez que l'application Φ_V (restriction de Φ à $V \times V$) de $V \times V$ dans $\vec{E}$ qui à (a,b) associe $\overrightarrow{ab}$ a pour image $\vec{V}$ et munit V d'une structure d'espace affine d'espace vectoriel sous-jacent $\vec{V}$.

3.3.3. ♡. Si a est un point d'un sous-espace affine V de direction $\vec{V}$, l'application $p \mapsto \overrightarrow{ap}$ est une bijection de V sur $\vec{V}$.

3.3.4. ♡. Si $p \in E$, l'application $\vec{V} \mapsto p + \vec{V}$ fournit une bijection de l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\vec{E}$ sur l'ensemble des sous-espaces affines de E passant par p.

3.4. **Dimension.** Par définition, la **dimension** de V est celle de $\vec{V}$. On dit que V est une **droite affine** si $\dim V = 1$, un **plan affine** si $\dim V = 2$, un **hyperplan affine** si $\dim V = \dim E - 1$.

Un **vecteur directeur d'une droite affine** D est un vecteur non nul de $\overrightarrow{D}$.

3.4.1. ♠. Quels sont les sous-espaces affines de dimension 0 ?

3.4.2. ♠. L'ensemble des vecteurs directeurs d'une droite D est

$$\{\overrightarrow{ab} \mid (a,b) \in D^2, a \neq b\}.$$

3.4.3. **Définition.** *On dit que des points sont* **alignés**[2], *resp.* **coplanaires** *s'ils appartiennent à une même droite affine, resp. un même plan affine. Des droites sont dites* **coplanaires** *si elles sont contenues dans un même plan affine.*

3.4.4. ♠. Soient V, W deux sous-espaces affines d'un espace affine E. Si V est contenu dans W, leurs dimensions soient égales si et seulement si V et W coïncident. Quels sont les sous-espaces affines d'une droite affine ? d'un plan affine ?

3.4.5. ♠. Dans les exemples 1.2.1 et 1.3 donnez la dimension de E et E_n.

3.5. **Remarques.**

3.5.1. Comment démontrer qu'un sous-ensemble V de E est un sous-espace affine ? On peut par exemple montrer que pour un point a bien choisi dans V, l'ensemble $\{\overrightarrow{ax} \mid x \in V\}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$, ou bien on peut écrire V sous la forme $a + \vec{F}$ où $\vec{F}$ est un sous-espace vectoriel déjà connu. Nous verrons plus loin une autre méthode utilisant le barycentre.

3.5.2. ♠. Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel muni de sa structure canonique d'espace affine. Montrez que les sous-espaces vectoriels de $\vec{E}$ sont des sous-espaces affines (passant par $\vec{0}$).

[2] L'alignement de trois points a, b, c peut être défini dans un autre cadre que celui de la géométrie affine. Il s'agit de la définition par les distances : a, b, c sont alignés si et seulement si la plus grande des trois distances ab, ac, bc est la somme des deux autres.

Selon le contexte, il ne faut pas hésiter à choisir l'une ou l'autre de ces définitions.

3.5.3. $\heartsuit$. Plus généralement, soit V une partie de $\vec{E}$ (espace vectoriel muni de sa structure canonique d'espace affine) contenant un vecteur $\vec{a}$. Montrer que V est un sous-espace affine de $\vec{E}$ si et seulement s'il existe un sous-espace vectoriel $\vec{V}$ de $\vec{E}$ tel que $V = t_{\vec{a}}(\vec{V})$ (ce résultat est illustré dans certains des exemples suivants).

3.6. **Exemples.**

3.6.1. $\clubsuit$. Dans $\mathbb{R}^2$, soit D l'ensemble des couples (x,y) qui vérifient $2x+3y=0$.
On dit que $2x+3y=0$ est une équation de D.

a. Montrez que D est une droite vectorielle de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ et une droite affine de l'espace affine $\mathbb{R}^2$ vérifiant $D=\vec{D}$.

b. Donnez un point a du sous-ensemble F d'équation $2x+3y=2$. Montrez que, si les points b et c sont dans F alors le vecteur $\overrightarrow{bc}$ appartient à $\vec{D}$.

c. Montrez que F est le sous-espace affine $a+\vec{D}$ de $\mathbb{R}^2$, image de D par une translation. Déterminez les vecteurs de deux translations qui conviennent. Trouvez-les toutes.

3.6.2. $\clubsuit$. Soit f une forme linéaire non nulle sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ (on rappelle que cela signifie que f s'écrit $f(x_1,\cdots,x_n)=\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n$ où les λ_i sont des réels non tous nuls ; quelle est la matrice de f ? Que représentent les λ_i ?). Soit H l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ d'équation $f(x)=0$ (c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $x=(x_1,\dots,x_n)$ vérifiant $f(x)=0$). Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ qui n'appartient pas à H. On considère maintenant $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure affine canonique et on pose $H_1=t_{\vec{u}}(H)$.

Montrez que H_1 est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ passant par $\vec{u}$, mais n'est pas un sous-espace vectoriel. Quelle est sa direction ? Donner une équation cartésienne de H_1 (c'est-à-dire une relation sur les coordonnées caractérisant les points de H_1).

3.6.3. $\clubsuit$. Soit g une application linéaire d'un espace vectoriel $\vec{E}$ dans un espace vectoriel $\vec{F}$ et $\vec{v}$ un vecteur de $\operatorname{Im} g$.

a. Montrez que l'image réciproque par g du vecteur $\vec{v}$ est un sous-espace affine de $\vec{E}$. Précisez sa direction.

b. Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de $\vec{E}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) Il existe $\vec{x}$ dans $g^{-1}(\vec{v})$ tel que $t_{\vec{u}}(\vec{x})$ appartient à $g^{-1}(\vec{v})$

(ii) Pour tout $\vec{x}$ dans $g^{-1}(\vec{v})$ on a $t_{\vec{u}}(\vec{x})$ appartient à $g^{-1}(\vec{v})$

(iii) Le vecteur $\vec{u}$ appartient à $\operatorname{Ker} g$.

3.6.4. $\clubsuit$. *Suite de 1.7.1.* On considère la partie V de E_1 formée des polynômes divisibles par $(x-\frac{1}{2})^2$.

a. Montrez que V est sous-espace affine de E_1. Quelle est sa direction ?

b. Dans le cas $n=4$. Donner un système d'équations cartésiennes de V dans la base $\mathcal{B}$ de E. En déduire que V est un plan de E.

$$\mathcal{B}=\{(x-\frac{1}{2})^4,(x-\frac{1}{2})^3,(x-\frac{1}{2})^2,(x-\frac{1}{2}),1\}$$

3.7. **Système d'équations cartésiennes d'un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$.**

3.7.1. D'après 3.6.3 , si $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^p$ est une application linéaire, pour $\vec{v}=(y_1,\cdots,y_p)$, l'image réciproque $V=f^{-1}(\vec{v})$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$. Soient $f_1,\cdots,f_p$ les p fonctions coordonnées de f : alors, par définition de l'image réciproque, V est l'ensemble des $(x_1,\cdots,x_n)$ tels que $f_1(x_1,\cdots,x_n)=y_1,\cdots,f_p(x_1,\cdots,x_n)=y_p$. Autrement dit, V est l'ensemble des solutions du système linéaire suivant à p équations aux inconnues $x_1,\cdots,x_n$:

$$(S)\left\{\begin{array}{l} f_1(x_1,\cdots,x_n)=y_1\\ f_2(x_1,\cdots,x_n)=y_2\\ \cdots\\ f_p(x_1,\cdots,x_n)=y_p\end{array}\right.$$

On dit que (S) est un **système d'équations cartésiennes** de V. Un point de V est une solution particulière de (S), la direction de V est le sous-espace vectoriel $\ker f$ de $\mathbb{R}^n$, c'est l'ensemble des solutions de (S_0), le système homogène associé à (S). Le sous-espace affine V est donc la somme d'une solution particulière de (S) et du sous-espace vectoriel des solutions de (S_0). On rappelle que la dimension de V est égale à $n-r$ où r est le rang du système (S).

3.7.2. Tout sous-espace affine V de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des solutions d'un système linéaire à n inconnues (voir 3.7.3). En effet, si on note k la dimension de V, le sous-espace vectoriel $\overrightarrow{V}$ de $\mathbb{R}^n$ admet un système linéaire homogène de $n-k$ équations cartésiennes :

$$\begin{cases} p_1(x_1,\cdots,x_n) & = & 0 \\ p_2(x_1,\cdots,x_n) & = & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n-k}(x_1,\cdots,x_n) & = & 0 \end{cases}$$

Alors un système d'équations cartésiennes de V est :

$$\begin{cases} p_1(x_1,\cdots,x_n) & = & p_1(a_1,a_2,\ldots,a_n) \\ p_2(x_1,\cdots,x_n) & = & p_2(a_1,a_2,\ldots,a_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n-k}(x_1,\cdots,x_n) & = & p_{n-k}(a_1,a_2,\ldots,a_n) \end{cases}$$

où $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ est un point de V.

3.7.3. *Rappel.* Si $\overrightarrow{W}$ est un supplémentaire de $\vec{V}$, considérons la projection p de $\mathbb{R}^n$ sur $\overrightarrow{W}$ parallèlement à $\vec{V}$ ($\vec{V}$ est donc le noyau de p). Par le choix d'une base, $\overrightarrow{W}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{n-k}$ et p s'écrit $p=(p_1,\ldots,p_{n-k})$ où les p_i sont des formes linéaires. Alors $\overrightarrow{V}$ admet pour système d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} p_1(x_1,\cdots,x_n) & = & 0 \\ p_2(x_1,\cdots,x_n) & = & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n-k}(x_1,\cdots,x_n) & = & 0 \end{cases}$$

3.7.4. *Equations d'une droite affine.* Dans $\mathbb{R}^n$, si (S) est un système d'équations linéaires définissant une droite affine, son rang r vérifie $n-r=1$, donc le système doit comporter au moins $r=n-1$ équations. Une droite affine dans $\mathbb{R}^2$ est définie par au moins une équation, dans $\mathbb{R}^3$, il en faut au moins deux.

3.7.5. *Remarque.* Un sous-espace affine a toujours une infinité de systèmes d'équations cartésiennes. Par exemple, on ne peut parler de **l**'équation d'une droite de $\mathbb{R}^2$: si $D=\{(x,y),2x+3y=2\}$, on a aussi bien $D=\{(x,y),4x+6y=4\}$, $D=\{(x,y),6x+9y=6\}$ ...

3.8. **Equation différentielle linéaire.** Soient a_0, $\cdots$, a_n, b des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, a_n ne s'annulant jamais. Alors l'ensemble des fonctions y de classe $\mathcal{C}^n$ solutions de l'équation différentielle linéaire $\sum_{k=0}^{k=n} a_k(t).y^{(k)}(t)=b(t)$ est un sous-espace affine (non vide) de l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont le sous-espace vectoriel sous-jacent est l'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène associée. Une solution particulière de l'équation est un point de ce sous-espace affine.

3.8.1. ♣. Soient a et b deux réels. Montrer que les suites de réels $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ vérifiant $u_{n+1}=au_n+b$ forment un sous-espace affine de l'espace des suites de réels.

4. INTERSECTION DE SOUS-ESPACES AFFINES, SOUS-ESPACE AFFINE ENGENDRÉ

4.1. **Intersection de sous-espaces affines.**

4.1.1. **Proposition.** *Une intersection quelconque de sous-espaces affines V_i, $(i \in I)$, est ou bien vide ou un sous-espace affine dont la direction est l'intersection des directions :*

$$\overrightarrow{\bigcap_{i\in I} V_i} = \bigcap_{i\in I} \vec{V}_i.$$

Démonstration. Si l'intersection n'est pas vide, on choisit un point a dans l'intersection et on peut écrire :

$$\Phi_a(\bigcap_{i\in I} V_i) = \{\overrightarrow{ax}, x \in \bigcap_{i\in I} V_i\} = \bigcap_{i\in I} \vec{V}_i$$

Donc l'intersection des V_i, $(i \in I)$ est un sous-espace affine de direction $\bigcap_{i\in I} \vec{V}_i$. □

4.1.2. ♠. Une condition nécessaire pour que l'intersection des sous-espaces affines A et B soit réduite à un point est que les sous-espaces vectoriels $\vec{A}$ et $\vec{B}$ soient en somme directe. Cette condition est-elle suffisante ?

4.1.3. ♠. Deux plans distincts et non disjoints de l'espace de dimension 3 ont pour intersection une droite.

4.1.4. ♣. Soient α, β, a, b et c des réels. Considérons 3 plans affines de l'espace affine $\mathbb{R}^3$:
P_1 d'équation $x + 2y + \beta z = a$, P_2 d'équation $2x + 4y = b$, P_3 d'équation $\alpha x + (\alpha + 1)y = c$.

Quelle est la dimension de leur intersection $F = P_1 \cap P_2 \cap P_3$? Quand F n'est pas vide, donnez-en un système d'équations les moins nombreuses possibles.

4.1.5. **Proposition.** *Si V et W sont deux sous-espaces affines d'un espace affine E de directions supplémentaires (c'est-à-dire $\vec{V} \oplus \overrightarrow{W} = \vec{E}$), alors $V \cap W$ est réduit à un point.*

Démonstration. Comme les directions $\vec{V}$ et $\overrightarrow{W}$ sont en somme directe, l'intersection de V et W est vide ou réduite à un point.

Montrons qu'elle est non vide. Soient a un point de V et b un point de W, le vecteur $\overrightarrow{ab}$ se décompose comme somme d'un vecteur $\vec{v}$ de $\vec{V}$ et d'un vecteur $\vec{w}$ de $\overrightarrow{W}$. Le point $c = a + \overrightarrow{v}$ est un point de V or de $\overrightarrow{ac} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{ab} = \vec{v} + \vec{w}$, on tire $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{cb}$, donc $c = b + (-\overrightarrow{w})$ est aussi un point de $\overrightarrow{W}$. □

4.1.6. Si V est une droite et W un hyperplan et que la direction de V n'est pas contenue dans celle de W, leurs directions sont supplémentaires, donc leur intersection est réduite à un point.

4.1.7. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application linéaire, et $\vec{v} = (y_1, \cdots, y_p)$ un vecteur de $\mathbb{R}^p$. On note $f_1, \cdots, f_p$ les formes linéaires coordonnées de f et on suppose que $V = f^{-1}(\vec{v})$ est non vide. Alors $H_i = f_i^{-1}(y_i)$ est l'hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$ d'équation $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_i$ et V est l'intersection des H_i.

4.2. **Sous-espace affine engendré - définition.**

4.2.1. **Corollaire et définition.** *Si A est une partie non vide de E il existe un plus petit sous-espace affine contenant A. Ce sous-espace est appelé* **sous-espace affine engendré** *par A et il est noté* Aff$A$.

Démonstration. On obtient Aff$A$ comme l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant A (il y a au moins E tout entier). □

4.2.2. *Remarque.* Pour déterminer Aff$A$, on choisit un candidat F, sous-espace affine contenant A et pas trop gros et on conclut avec un argument de dimension. Voici deux exemples :

4.2.3. ♠. Soient a, b et c trois points distincts de l'espace affine $\mathbb{R}^3$. Déterminer $\mathrm{Aff} A$ quand

(i) $A = \{a,b\}$

(ii) $A = \{a,b,c\}$ et a,b et c sont alignés

(iii) $A = \{a,b,c\}$ et a,b et c ne sont pas alignés.

Conclusion : Par deux points a et b distincts passe une et une seule droite que l'on notera (ab). Par trois points non alignés passe un et un seul plan.

4.2.4. ♠. Dans l'exemple 1.2.1, montrez que E est le sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ engendré par $i = (1,0,0), j = (0,1,0), k = (0,0,1)$.

4.3. **Sous-espace affine engendré - description.**

4.3.1. **Proposition.** *Avec les notations précédentes on a, si $a \in A$,*

$$\mathrm{Aff} A = a + \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{am} \mid m \in A\}.$$

Autrement dit, la direction de $\mathrm{Aff} A$ est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\overrightarrow{am}$ où a et m sont des points de A.

Démonstration. Posons $W = a + \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{am} \mid m \in A\}$. C'est un sous-espace affine qui contient A (en vertu de la relation $m = a + \overrightarrow{am}$). W contient donc aussi $\mathrm{Aff} A$ car $\mathrm{Aff} A$ est le plus petit sous-espace affine contenant A. On a montré l'inclusion $\mathrm{Aff} A \subset W$.

Réciproquement, comme $\mathrm{Aff} A$ est un sous-espace affine, on peut l'écrire sous la forme $\mathrm{Aff} A = a + \vec{V}$ et $\vec{V}$ est, par définition, un sous-espace vectoriel qui contient au moins tous les vecteurs $\overrightarrow{am}$ où a et m sont des points de A, il contient donc le sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel $\overrightarrow{W}$ et on a donc $W \subset \mathrm{Aff} A$. □

4.3.2. ♠. Vous avez dû montrer en 4.2.3 que le sous-espace affine engendré par deux points a et b est la droite affine passant par a et b, retrouvez ce résultat en utilisant la description de $\mathrm{Aff} A$ de ce paragraphe.

4.3.3. ♠. *Suite de 4.2.4* A l'aide de ce qui précède, retrouvez le fait que $\vec{E} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{ij}, \overrightarrow{ik})$.

5. Parallélisme

5.1. **Définitions.** *Soient V et W deux sous-espaces affines de E. On dit que V et W sont* **parallèles** *s'ils ont même direction, i.e., si on a $\vec{V} = \overrightarrow{W}$. On note $V \parallel W$ (on dit parfois que V et W sont strictement parallèles).*

On dit que V est **faiblement parallèle** *à W si $\vec{V}$ est contenu dans $\overrightarrow{W}$.*

5.1.1. △. La relation de parallélisme est une relation d'équivalence, et celle de parallélisme faible est une relation d'ordre partiel.

♠. Dans votre espace vital familier, avec deux stylos et deux feuilles de papier, simulez deux droites parallèles, deux plans parallèles, une droite faiblement parallèle à un plan et envisagez les résultats de la proposition suivante.

5.2. **Proposition.**

(i) *Si V et W sont parallèles, V et W sont confondus ou bien leur intersection est vide.*

(ii) *Si V est faiblement parallèle à W, V est contenu dans W ou V ne rencontre pas W.*

Démonstration.

(i) Si $V \cap W$ n'est pas vide, il contient un point a. On peut écrire $V = a + \vec{V}$ et $W = a + \overrightarrow{W}$, donc, puisque $\vec{V} = \overrightarrow{W}$, V et W sont égaux.

(ii) Si $V \cap W$ n'est pas vide, il contient un point a. On peut écrire $V = a + \overrightarrow{V}$ et $W = a + \overrightarrow{W}$, donc, puisque $\vec{V} \subset \overrightarrow{W}$, V est contenu dans W.

$\square$

5.3. **Remarques.**

5.3.1. ♠. Vous pouvez maintenant démontrer ces affirmations qui ont bercé votre enfance :

(i) Par tout point d'un plan, il passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée (postulat d'Euclide).

(ii) Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.

(iii) Deux droites parallèles d'un plan ne se coupent pas ou sont confondues.

(iv) Deux droites disjointes d'un plan sont parallèles.

5.3.2. △. Deux droites disjointes dans l'espace ne sont pas nécessairement parallèles.

5.3.3. ♠. Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont mêmes vecteurs directeurs ou encore si et seulement si elles ont un vecteur directeur commun.

5.3.4. ♣. Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, trouvez une équation du plan affine passant par le point $(1,2,3)$ et parallèle au plan d'équation $x+y+z=-1$. Donnez un système d'équations d'une droite affine passant par le point $(1,2,3)$ et faiblement parallèle au plan d'équation $x+y+z=-1$.

5.3.5. ♣. Soient E un espace affine de direction $\vec{E}$ et $\vec{V}$ un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$. On définit sur E la relation ν :

$$\forall (a,b) \in E^2 \quad a \,\nu\, b \Longleftrightarrow \overrightarrow{ab} \in \vec{V}$$

Montrer que ν est une relation d'équivalence. Quelles sont les classes d'équivalence ?

5.3.6. ♣. Montrer que deux sous-espaces affines sont parallèles si et seulement s'il existe une translation qui envoie l'un sur l'autre. Généraliser ce résultat au parallélisme faible.

5.3.7. *Principe.* Pour étudier le parallélisme ou l'intersection de deux sous-espaces affines, on commence par traiter le problème vectoriel associé (c'est un principe général de géométrie affine de commencer par l'aspect vectoriel), puis on regarde si l'espace considéré est vide ou pas.

6. Exercices

6.1. ♣. Extrait d'une épreuve de concours.

6.1.1. Dans l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ des matrices $n \times n$ sur $\mathbb{R}$, on considère le sous-ensemble :

$$V = \{A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R}) \mid \forall i = 1,\dots,n \ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 0, \quad \forall j = 1,\dots,n \ \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 0\}.$$

Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ (pour éviter de répéter les mêmes calculs, on pourra utiliser la forme linéaire $c_{k,l}$ qui à la matrice $(a_{i,j})$ associe son coefficient $a_{k,l}$). Quelle est la dimension de V ?

6.1.2. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de sa structure canonique d'espace affine. Posons

$$F = \{A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R}) \mid \forall i = 1,\dots,n \ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1, \quad \forall j = 1,\dots,n \ \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1\}.$$

Montrer que F est un sous-espace affine de $M_n(\mathbb{R})$ dont on précisera la direction.

6.2. ♣. Soient V et W deux sous-espaces affines de E. Montrer qu'on a $\vec{V} \oplus \overrightarrow{W} = \vec{E}$ si et seulement si $V \cap W$ est un singleton et $\mathrm{Aff}(V \cup W) = E$.

6.3. ♣ **Parallélogramme.** (voir 1.4.3) Soient a, b, a', b' des points d'un espace affine E. On suppose que a, a', b sont affinement indépendants (c'est-à-dire, cf. II.3.2, que les vecteurs $\overrightarrow{aa'}$ et $\overrightarrow{ab}$ sont linéairement indépendants). Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $abb'a'$ est un parallélogramme

(ii) $\overrightarrow{ab'} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{aa'}$

(iii) Les droites (ab) et $(a'b')$ ainsi que (aa') et (bb') sont parallèles.

Exprimer les propriétés caractéristiques du parallélogramme (sans oublier celle des milieux montrée en 1.4.3) dans le langage de la géométrie (faire un dessin).

6.4. ♣**.** Déterminer, dans $\mathbb{R}^3$, l'intersection d'un plan P et d'une droite D.

6.5. ♣ **Sous-espace affine engendré par deux droites.**

6.5.1. Déterminer le sous-espace affine engendré par deux droites affines dans un espace affine de dimension finie.

6.5.2. Trouver un système d'équations cartésiennes du sous-espace affine engendré dans $\mathbb{R}^4$ par les deux droites

$$D_1 = \{(1,0,0,0) + t\,(1,1,1,1)\,; t \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad D_2 = \{(0,1,0,0) + t\,(1,0,1,0)\,; t \in \mathbb{R}\}$$

6.5.3. Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, on considère les droites D et D' d'équations :

$$D : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & 4z & = & -1 \\ x & - & 2y & + & z & = & 3 \end{array} \right. \qquad D' : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 11x & - & y & - & 7z & = & \alpha \\ x & + & y & + & z & = & 1 \end{array} \right.$$

a. Les droites sont-elles parallèles, sécantes ou non-coplanaires ?

b. Pouvez-vous donner un système d'équations de D comprenant une des équations données pour D' ?

c. Donner un système d'équations cartésiennes du sous-espace affine engendré dans $\mathbb{R}^3$ par les deux droites.

6.6. ♡ **Généralisation.** Soient V et W deux sous-espaces affines d'un espace affine E et T le sous-espace affine engendré par leur réunion.

6.6.1. Montrer, pour tout a de V et b de W, l'égalité : $\vec{T} = \vec{V} + \vec{W} + \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{ab}\}$.

6.6.2. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $V \cap W$ est non vide

(ii) Il existe $a \in V$ et $b \in W$ tels que le vecteur $\overrightarrow{ab}$ appartienne à $\vec{V} + \vec{W}$.

(iii) Pour tout $a \in V$ et tout $b \in W$, le vecteur $\overrightarrow{ab}$ appartient à $\vec{V} + \vec{W}$.

6.6.3. En déduire que l'on a
$\dim T = \dim(\vec{V} + \vec{W}) + 1$ si $V \cap W = \emptyset$
et $\dim T = \dim(\vec{V} + \vec{W})$ sinon.

II. BARYCENTRES

Dans ce chapitre, E est un espace affine.

1. Définitions et propriétés

1.1. **Définition.** *On appelle* **point pondéré** *un couple* (a,λ) *où* a *est un point de* E *et* λ *un réel. Le nombre* λ *est appelé le* **poids** *ou la* **masse** *de* a.

$\triangle$ L'intuition de points affectés de masses est excellente, mais attention, contrairement à ce qui se passe en physique, ici les masses peuvent être négatives.

1.2. **Définition.** *Le réel* $\Lambda = \sum_{i=1}^r \lambda_i$ *est dit* **masse totale** *de la famille de points pondérés*

$$\{(a_1,\lambda_1),(a_2,\lambda_2),\dots(a_r,\lambda_r)\}.$$

1.3. **Théorème et définition.** *Soit* $\{(a_1,\lambda_1),(a_2,\lambda_2),\dots(a_r,\lambda_r)\}$ *une famille de points pondérés de* **masse totale non nulle**. *Il existe un unique point* g *de* E *qui vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes*[3] *:*

- **(i)** $\sum_{i=1}^r \lambda_i \overrightarrow{ga_i} = \overrightarrow{0}$,
- **(ii)** $\forall \alpha \in \mathbb{R}^* \;\; \sum_{i=1}^r \alpha\lambda_i \overrightarrow{ga_i} = \overrightarrow{0}$,
- **(iii)** $\exists a \in E \;\; (\sum_{i=1}^r \lambda_i)\overrightarrow{ag} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \overrightarrow{aa_i}$,
- **(iv)** $\forall b \in E \;\; (\sum_{i=1}^r \lambda_i)\overrightarrow{bg} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \overrightarrow{ba_i}$.

Le point g est appelé **barycentre des points** a_i **affectés des masses** λ_i ou **barycentre de la famille** $\{(a_1,\lambda_1),(a_2,\lambda_2),\dots,(a_r,\lambda_r)\}$.

Démonstration. Montrons d'abord que les conditions sont équivalentes. Il est clair que (i) et (ii) sont équivalentes et que (iv) implique (iii). Pour voir que (i) implique (iv) on écrit la relation de Chasles avec un point b quelconque :

$$\overrightarrow{0} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \overrightarrow{ga_i} = \sum_{i=1}^r \lambda_i(\overrightarrow{gb} + \overrightarrow{ba_i}) = (\sum_{i=1}^r \lambda_i)\overrightarrow{gb} + \sum_{i=1}^r \lambda_i \overrightarrow{ba_i},$$

d'où le résultat. La démonstration du fait que (iii) implique (i) s'obtient en lisant le calcul précédent à l'envers.

L'existence et l'unicité du point g sont claires avec (iii) : si on choisit $a \in E$ quelconque et si on pose $\lambda = \sum_{i=1}^r \lambda_i$, on a $g = a + \sum_{i=1}^r \frac{\lambda_i}{\lambda}\overrightarrow{aa_i}$, $\square$

1.4. **Remarques.**

1.4.1. Le barycentre est une "moyenne" des points pondérés : la "barycentration" est analogue à une intégration et s'utilise souvent de manière analogue.

1.4.2. Le barycentre ne dépend pas de l'ordre des points pondérés.

1.4.3. On ne demande pas que les points a_i soient deux à deux distincts.

1.4.4. ♠. Existe-t-il dans le plan affine quatre points a, b, c et m tels que m soit barycentre du système $\{(a,1),(b,1),(c,1)\}$ et barycentre du système $\{(a,2),(b,0),(c,2)\}$?

[3] Chacune de ces conditions doit être sue et utilisée selon le contexte, il est maladroit de se contenter d'en apprendre une et de redémontrer les autres quand celles-ci donnent le résultat directement.

1.4.5. Si λ_n est nulle, alors le barycentre de la famille $\{(a_1,\lambda_1),(a_2,\lambda_2),\ldots,(a_n,\lambda_n)\}$ est le barycentre de la famille $\{(a_1,\lambda_1),(a_2,\lambda_2),\ldots,(a_{n-1},\lambda_{n-1})\}$.

1.4.6. *Très important.* Grâce à (ii), on voit qu'on ne change pas le barycentre quand on multiplie chaque masse λ_i par un même nombre α non nul. On peut donc supposer que la masse totale $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ de la famille est 1 en prenant $\alpha = \frac{1}{\Lambda}$.

1.4.7. *Notation.* Dans le cas $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ (et seulement dans ce cas !), on notera parfois le barycentre $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.a_i$. Cela revient à considérer les points comme des vecteurs en vectorialisant E à partir d'un quelconque de ses points. (C'est la formule (iv)).

1.4.8. ♠. Soit $\{(a_1,\lambda_1),(a_2,\lambda_2),\ldots(a_r,\lambda_r)\}$ une famille de points pondérés de $\mathbb{R}^2$ où a_i est le couple (x_i,y_i) et où la masse totale $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ n'est pas nulle. Alors le barycentre de la famille $\{(a_1,\lambda_1),(a_2,\lambda_2),\ldots,(a_r,\lambda_r)\}$ est le point (x,y) tel qu'on ait

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.x_i}{\Lambda} \quad \text{et} \quad y = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.y_i}{\Lambda}.$$

1.4.9. ♣. Généralisez ce dernier résultat à $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$.

1.4.10. ♠. Dans l'espace affine de l'exemple I.1.2.1, déterminer le point m barycentre des points $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$ et $k = (0,0,1)$ affectés des coefficients a,b,c avec $a+b+c = 1$.

1.4.11. ♡. Les fonctions scalaire ($m \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m a_i^2$) et vectorielle ($m \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{ma_i}$) de Leibniz, que vous avez rencontrées dans le secondaire et qui se calculent à l'aide de barycentres, sont au programme du CAPES (et notamment de l'oral). Vous devrez donc les avoir revues pour le concours.

1.5. **Segment.** Grâce aux barycentres, on peut définir la notion de segment donc donner un sens précis à l'expression : m est entre a et b.

Définition. *Soient a et b deux points de E. Le* **segment** $[ab]$ *est l'ensemble des barycentres des points a et b affectés de masses positives. Les points a et b sont appelés les extrémités du segment* $[ab]$.

1.5.1. ♠. Montrez que le point m appartient à $[ab]$ si et seulement si il existe un réel α de $[0,1]$ tel que m soit le barycentre de $\{(a,\alpha),(b,1-\alpha)\}$.

1.5.2. ♠. On dit parfois que $[ab]$ est le segment **fermé** d'extrémités a et b. Définir les notions de segments (ou intervalles) ouverts et semi-ouverts.

1.6. **Isobarycentre.**

Définition. *Si toutes les masses des points pondérés considérés sont égales et non nulles, le barycentre est appelé* **isobarycentre**.
L'isobarycentre de deux points a et b distincts est appelé **milieu** [4] du segment $[ab]$.

1.6.1. ♠. Le milieu m d'un segment $[ab]$ appartient au segment $[ab]$ et il est caractérisé par la relation $\overrightarrow{am} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ab}$ ou par la relation équivalente $\overrightarrow{am} = \overrightarrow{mb}$. C'est aussi le milieu de $\{a,b\}$ défini en 1.4.2.

1.6.2. ♠. Donnez les coordonnées du milieu de deux points de $\mathbb{R}^2$, puis de l'isobarycentre de n points de $\mathbb{R}^2$. Déterminer l'isobarycentre des points i,j,k de 1.4.10.

[4] On notera que cette notion de milieu est purement affine : elle peut se définir indépendamment de l'existence d'une distance sur l'espace affine considéré. Dans un problème de géométrie purement affine (sans introduction d'une distance), on ne peut pas caractériser le milieu par les relations $ma = mb = \frac{1}{2}\, ab$: cela n'a aucun sens. Bien entendu, en géométrie euclidienne, cette caractérisation est très importante.

1.7. **Associativité du barycentre.**

> *Le résultat suivant permet de remplacer dans la recherche d'un barycentre un groupe de points pondérés par leur barycentre, affecté de la somme de leurs masses (si elle n'est pas nulle).*

1.7.1. **Proposition.** *Soit $I = \{0,1,\cdots,n\}$. Supposons qu'on ait une partition de I, soit $I = J_0 \cup \cdots \cup J_r$ (les J_k étant disjoints). Soient $a_0,\cdots,a_n$ des points de E et $\lambda_0,\cdots,\lambda_n$ des scalaires de somme non nulle. Pour chaque $k = 0,1,\cdots,r$ on suppose que $\mu_k = \sum_{i\in J_k} \lambda_i$ est non nul et on note b_k le barycentre de la famille $\{(a_i,\lambda_i), i \in J_k\}$.*
Alors $\sum_{k=0}^{r} \mu_k$ est non nul et le barycentre b des points b_k affectés des masses μ_k ($k = 0,\dots,r$) est aussi le barycentre de la famille $\{(a_i,\lambda_i),\ i \in I\}$.

Démonstration. On a $\sum_{k=0}^{r} \mu_k = \sum_{k=0}^{r} \sum_{i\in J_k} \lambda_i = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i$ et cette quantité est non nulle par hypothèse. Par définition du barycentre on a $\sum_{k=0}^{r} \mu_k \overrightarrow{bb_k} = \overrightarrow{0}$, soit encore $\sum_{k=0}^{r} \left[\sum_{i\in J_k} \lambda_i \overrightarrow{bb_k} \right] = \overrightarrow{0}$. En appliquant la relation de Chasles : $\overrightarrow{bb_k} = \overrightarrow{ba_i} + \overrightarrow{a_ib_k}$ pour $i \in J_k$ on obtient

$$\overrightarrow{0} = \sum_{k=0}^{r} \sum_{i\in J_k} \lambda_i \overrightarrow{ba_i} + \sum_{k=0}^{r} \sum_{i\in J_k} \lambda_i \overrightarrow{a_ib_k} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{ba_i} + \sum_{k=0}^{r} \sum_{i\in J_k} \lambda_i \overrightarrow{a_ib_k}.$$

Comme b_k est le barycentre de la famille $\{(a_i,\lambda_i), i \in J_k\}$, on a $\sum_{i\in J_k} \lambda_i \overrightarrow{a_ib_k} = \overrightarrow{0}$ pour tout k. On en déduit $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{ba_i} = \overrightarrow{0}$, d'où le résultat. □

> *Cette proposition a de très nombreuses applications : outre les récurrences qu'elle permet, elle entraîne l'identité d'un grand nombre de barycentres (autant qu'il y a de partitions $I = J_0 \cup \cdots \cup J_r$ comme dans la proposition). Les applications directes suivantes doivent être connues.*

1.7.2. ♠. Ecrire l'énoncé de la proposition dans le cas $n = 3$ et $r = 1$.

1.7.3. ♣. *Centre de gravité d'un triangle.* Soient a,b,c (resp. p,q,r) trois points non alignés d'un plan affine.

a. Montrer que les triangles abc et pqr ont même isobarycentre si et seulement si on a $\overrightarrow{ap} + \overrightarrow{bq} + \overrightarrow{cr} = \vec{0}$.

b. Soit g l'isobarycentre de a,b,c et a',b',c' les milieux de $[bc],[ca],[ab]$. Montrer que g est le point d'intersection des **médianes** $[aa'],[bb'],[cc']$ et qu'il est situé au tiers de chacune d'elles : par exemple on a $\overrightarrow{a'g} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a'a}$.

c. Montrer que les triangles abc et $a'b'c'$ ont même isobarycentre.

1.7.4. ♣. *Centre de gravité d'un tétraèdre.* Soient a, b, c et d quatre points non coplanaires de E (ces points déterminent un *tétraèdre*, leur enveloppe convexe (cf. III.2) dont ils sont les sommets) et g leur isobarycentre. On note i, j, k, i', j', k' les milieux des segments $[ab]$, $[ac]$, $[ad]$, $[cd]$, $[bd]$ et $[bc]$.

a. Montrer que les droites (ii'), (jj') et (kk') sont concourantes en g et que g est milieu de $[ii']$, $[jj']$ et $[kk']$.

b. Que dire des droites joignant un sommet du tétraèdre au centre de gravité de la face opposée à ce sommet ?

c. Que dire des 6 plans $\mathrm{Aff}\{abi'\}$, $\mathrm{Aff}\{acj'\}$, $\mathrm{Aff}\{adk'\}$, $\mathrm{Aff}\{cdi\}$, $\mathrm{Aff}\{bdj\}$, $\mathrm{Aff}\{bck\}$?

d. Donner des constructions géométriques du centre de gravité d'un tétraèdre.

1.7.5. *Remarque.* On est parfois amené à utiliser l'associativité du barycentre deux fois, une fois pour "désassocier" et une autre pour "associer différemment". Cette remarque est mise en forme dans la proposition suivante mais utilisez-la déjà pour traiter l'exemple suivant.

♠. Soit g l'isobarycentre d'un triangle abc. Ecrire le milieu de $[ag]$ comme barycentre des points a, b et c.

1.7.6. *Double associativité.* [5]

Proposition. *Soient $a_0, \cdots, a_n$ et $b_0, \cdots, b_r$ deux familles de points de E. Pour tout $j = 0, \cdots, r$, on suppose que b_j est barycentre des points a_i affectés des masses λ_{ij} avec $\sum_{i=0}^{n} \lambda_{ij} = 1$ pour tout j. Soit g le barycentre des points b_j affectés des masses μ_j avec $\sum_{j=0}^{r} \mu_j = 1$. Alors g est barycentre des points a_i affectés des masses $\nu_i = \sum_{j=0}^{r} \mu_j \lambda_{ij}$ (supposées non nulles).*

Démonstration. Notons déjà qu'on a :

$$\sum_{i=0}^{n} \nu_i = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{r} \mu_j \lambda_{ij} = \sum_{j=0}^{r} \mu_j \sum_{i=0}^{n} \lambda_{ij} = \sum_{j=0}^{r} \mu_j = 1.$$

On a aussi les relations :

$$\sum_{i=0}^{n} \nu_i \overrightarrow{ga_i} = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{r} \mu_j \lambda_{ij} \right) \overrightarrow{ga_i} = \sum_{j=0}^{r} \mu_j \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_{ij} \overrightarrow{ga_i} \right).$$

Comme b_j est le barycentre des (a_i, λ_{ij}) on a $\sum_{i=0}^{n} \lambda_{ij} \overrightarrow{ga_i} = \overrightarrow{gb_j}$ en vertu de 1.3(iii). Mais, comme g est le barycentre des (b_j, μ_j), on en déduit que le vecteur $\sum_{i=0}^{n} \nu_i \overrightarrow{ga_i}$ est nul, d'où la conclusion par 1.3(i). □

1.7.7. *En pratique.* L'utilisation de l'associativité du barycentre ne doit pas vous amener à redémontrer les propositions utilisées (avec de nombreuses relations de Chasles). Il est essentiel de vérifier que la masse totale des points associés n'est pas nulle et dans le cas de la double associativité que les diverses masses totales valent 1. Dans ce dernier cas, un tableau de ce type peut être utile au brouillon :

		a_0	a_1	$\ldots$	a_n
μ_0	b_0	$\lambda_{0,0}$	$\lambda_{1,0}$	$\ldots$	$\lambda_{n,0}$
μ_1	b_1	$\lambda_{0,1}$	$\lambda_{1,1}$	$\ldots$	$\lambda_{n,1}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
μ_r	b_r	$\lambda_{0,r}$	$\lambda_{1,r}$	$\ldots$	$\lambda_{n,r}$
1	g	$\sum_{j=0}^{r} \mu_j \lambda_{0,j}$	$\sum_{j=0}^{r} \mu_j \lambda_{1,j}$	$\ldots$	$\sum_{j=0}^{r} \mu_j \lambda_{n,j}$

Sur chaque ligne, on écrit b_j comme barycentre des a_i (en colonne), les coefficients qui précèdent les b_j sont les masses de g comme barycentre de b_j. Pour obtenir la masse ν_k associé à a_k pour g barycentre des a_i, il suffit de faire la somme, pondérée par les coefficients de début de ligne des masses de la colonne k.

1.7.8. ♣. *Cet exercice sera repris tout au long de ce chapitre :* Soient abc un triangle, a' un point du segment $[bc]$, b' un point du segment $[ac]$ et c' un point du segment $[ab]$. On veut déterminer l'ensemble F des isobarycentres des points a', b' et c'.

- **a.** Ecrire ces hypothèses comme en 1.5 : a' un point du segment $[bc]$ *i.e* a' est barycentre de $(b, \alpha), (c, 1 - \alpha)$ ... (Respectez les symétries du problème.)
- **b.** Ecrire l'isobarycentre de a', b' et c' comme un barycentre de a, b et c. (*à suivre en 4.5*)

[5]Cette appellation n'est pas "contrôlée".

2. Barycentres et sous-espaces affines

2.1. Caractérisation des sous-espaces affines.

Proposition. *Soit V un sous-espace affine de E. Alors V est stable par barycentration (i.e. le barycentre de toute famille finie de points de V pondérée de façon quelconque est encore dans V). Réciproquement, si V est une partie (non vide) de E stable par barycentration, alors V est un sous-espace affine de E.*

Démonstration.

Supposons V affine de direction $\overrightarrow{V}$. Soient $a_1, \cdots, a_n$ des points de V et soit g le barycentre de la famille (a_i, λ_i), avec $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Soit a un point de V. On a donc $\overrightarrow{ag} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{aa_i}$. Comme a et les a_i sont dans V, les vecteurs $\overrightarrow{aa_i}$ sont dans $\overrightarrow{V}$, donc aussi leur combinaison linéaire $\overrightarrow{ag}$. Comme a est dans V, il en résulte que g est dans V.

Réciproquement, supposons V stable par barycentration. Soient a, x, y des points de V et λ un scalaire. Définissons les points z et t de E par les formules : $\overrightarrow{az} = \overrightarrow{ax} + \overrightarrow{ay}$ et $\overrightarrow{at} = \lambda \overrightarrow{ax}$. Par définition d'un sous-espace affine, il s'agit de montrer que z et t sont dans V. Mais, en utilisant la relation de Chasles, on obtient les formules $-\overrightarrow{za} + \overrightarrow{zx} + \overrightarrow{zy} = \overrightarrow{0}$ et $(1-\lambda)\overrightarrow{ta} + \lambda \overrightarrow{tx} = \overrightarrow{0}$ qui montrent que z et t sont des barycentres des points a, x, y, donc sont dans V. □

> *Ainsi, les sous-espaces affines sont exactement les parties stables par barycentration. Cela fournit une nouvelle méthode pour montrer qu'une partie est un sous-espace affine.*

2.1.1. ♣. Soit V une partie non vide de E, telle que pour tous a, b distincts dans V, la droite (ab) est contenue dans V. Montrer que V est un sous-espace affine.

Il y a deux voies possibles : soit revenir à la définition des sous-espaces affines et utiliser les propriétés du parallélogramme, soit utiliser la caractérisation des sous-espaces par les barycentres et raisonner par récurrence.

2.2. Sous-espace affine engendré.

Les barycentres permettent une nouvelle description du sous-espace engendré par un nombre fini de points :

Proposition. *Soient $a_0, \cdots, a_r \in E$. L'ensemble des barycentres des a_i (avec toutes les masses possibles de somme 1) est égal au sous-espace affine* $\mathrm{Aff}\{a_0, \cdots, a_r\}$ *engendré par les a_i.*

Démonstration.

Si g est le barycentre des a_i affectés des masses λ_i (de somme 1) on écrit :

$$g = a_0 + \overrightarrow{a_0g} = a_0 + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{a_0a_i}$$

de sorte que g est bien dans le sous-espace engendré par les a_i.

Réciproquement si g est dans le sous-espace engendré par les a_i on écrit :

$$g = a_0 + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{a_0a_i} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{a_0g} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{a_0a_i}$$

et en décomposant chaque vecteur $\overrightarrow{a_0a_i}$ en $\overrightarrow{a_0g} + \overrightarrow{ga_i}$ on obtient

$$\Big(1 - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\Big) \overrightarrow{ga_0} + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{ga_i} = \vec{0}$$

et donc g est le barycentre des a_i affectés des masses $(1 - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i), \lambda_1, \cdots, \lambda_r$. □

2.2.1. ♠. Interpréter la proposition précédente dans le cas où E est l'espace affine de I.1.2.1 et où les points a_i sont les points i, j, k de 1.4.10.

2.2.2. ♠. Soit A une partie quelconque de E. Montrer que Aff$A$ est l'ensemble X des barycentres des familles finies de points de A affectés de masses quelconques.

> *En particulier, si a et b sont deux points distincts de E, la droite (ab) est l'ensemble de tous les barycentres de a et b. Ainsi d'une relation de barycentres entre trois points, on peut déduire une propriété d'alignement. De plus, trois droites (ab), $(a'b')$, $(a''b'')$ sont concourantes en un point g si et seulement si g est barycentre de a et b, de a' et b', de a'' et de b'' : il n'est pas étonnant que la propriété d'associativité du barycentre entraîne des résultats de concours.*

3. Repères affines et coordonnées

3.1. La remarque de base.

Proposition. *Soient $k+1$ points $a_0, a_1, \cdots, a_k$ de E. Le sous-espace affine $\mathrm{Aff}\{a_0, a_1, \cdots, a_k\}$ est de dimension au plus k.*

Démonstration. Par définition, la dimension de $\mathrm{Aff}\{a_0, a_1, \cdots, a_k\}$ est celle de sa direction. D'après I.4.3, la direction de $\mathrm{Aff}\{a_0, a_1, \cdots, a_k\}$ est le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{a_0a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_0a_k})$ qui admet donc un système générateur de k vecteurs : $\{\overrightarrow{a_0a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_0a_k}\}$, sa dimension est alors au plus k. □

3.1.1. *Remarque.* On notera la différence avec les espaces vectoriels : il faut $k+1$ points pour engendrer un sous-espace affine de dimension k (c'est normal, il faut une origine en plus).

3.2. Points affinement indépendants.

Définition. *Soient $a_0, a_1, \cdots, a_k$ des points de E. On dit que $a_0, a_1, \cdots, a_k$ sont* **affinement indépendants** *si le sous-espace affine engendré par les a_i est de dimension k.*

3.2.1. *Remarque.* On notera que cette notion est indépendante de l'ordre des a_i.

3.2.2. *Exemples.*

- **(i)** Deux points distincts sont affinement indépendants.
- **(ii)** Trois points non alignés sont affinement indépendants.

♠. Démontrez (i) et (ii).

3.3. Critères d'indépendance affine.

Proposition. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- **(i)** *Les points $a_0, a_1, \cdots, a_k$ sont affinement indépendants.*
- **(ii)** $\forall i = 0, \cdots, k, \quad a_i \notin \mathrm{Aff}\{a_0, \cdots, \widehat{a_i}, \cdots, a_k\}$ *(où la notation $\widehat{a_i}$ signifie qu'on omet le point a_i).*
  (ii bis) $\forall i = 0, \cdots, k$, a_i *n'est pas barycentre des points* $\{a_0, \cdots, \widehat{a_i}, \cdots, a_k\}$,
- **(iii)** *Les points $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}$ sont affinement indépendants et a_k n'appartient pas à $\mathrm{Aff}\{a_0, \cdots, a_{k-1}\}$ (i.e. n'est pas barycentre des points $\{a_0, \cdots, a_{k-1}\}$).*
- **(iv)** *Pour tout $i \in \{0, \cdots, k\}$, les vecteurs $\overrightarrow{a_0a_i}, \overrightarrow{a_1a_i}, \cdots, \overrightarrow{a_{i-1}a_i}, \overrightarrow{a_{i+1}a_i}, \cdots, \overrightarrow{a_ka_i}$ sont linéairement indépendants.*
- **(v)** *Il existe $i \in \{0, \cdots, k\}$ tel que les vecteurs $\overrightarrow{a_0a_i}, \overrightarrow{a_1a_i}, \cdots, \overrightarrow{a_{i-1}a_i}, \overrightarrow{a_{i+1}a_i}, \cdots, \overrightarrow{a_ka_i}$ soient linéairement indépendants.*

Démonstration. L'équivalence de *(ii)* et *(ii bis)* résulte de 2.2.

Montrons $(i) \Longrightarrow (ii)$. On a vu en 3.1 ci-dessus que le sous-espace $X_i = \mathrm{Aff}\{a_0, \cdots, \widehat{a_i}, \cdots, a_k\}$, engendré par k points, est de dimension inférieure ou égale à $k-1$. Si a_i est aussi dans X_i, le sous espace engendré par $a_0, \cdots, a_k$ est égal à X_i donc de dimension inférieure ou égale à $k-1$ ce qui contredit *(i)*.

$(iii) \Longrightarrow (i)$ Comme les points $a_0, \cdots, a_{k-1}$ sont affinement indépendants, $X_0 = \mathrm{Aff}\{a_0, \cdots, a_{k-1}\}$ est de dimension $k-1$. Mais alors, comme a_k n'est pas dans X_0, l'espace X engendré par $a_0, \cdots, a_k$ est strictement plus grand que X_0, donc de dimension supérieure ou égale à k, donc égale à k en vertu de 3.1 et on a prouvé que les points sont affinement indépendants.

$(ii) \Longrightarrow (i)$ On raisonne par récurrence sur k. Pour $k = 1$ la propriété est évidente grâce à 3.2.2 (i). Passons de $k-1$ à k. Pour $i > 0$, le point a_i n'est pas dans le sous-espace affine engendré par $a_1, \cdots, \widehat{a_i}, \cdots, a_k$. Par l'hypothèse de récurrence les points $a_1, \cdots, a_k$ sont donc affinement indépendants. L'implication $(iii) \Longrightarrow (i)$ permet alors de conclure.

En vertu de 4.3 on a, pour tout i,

$$(*) \qquad X = \mathrm{Aff}\{a_0, \cdots, a_k\} = a_i + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{a_i a_j}, j \neq i) = a_i + \overrightarrow{V_i}.$$

Cela montre aussitôt $(i) \Longrightarrow (iv)$. L'implication $(iv) \Longrightarrow (v)$ est évidente. Enfin, si on a (v) avec l'indice i on applique la formule $(*)$. L'espace vectoriel $\overrightarrow{V_i}$ est de dimension k et on en déduit que X est un sous-espace affine de dimension k ce qui montre *(i)*.

Les propriétés (iv) ou (v) montrent que si les points $a_0, \cdots, a_k$ sont affinement indépendants il en est de même de toute sous-famille de points. Combiné avec $(i) \Longrightarrow (ii)$ cela achève de montrer $(i) \Longrightarrow (iii)$. □

3.3.1. ♠. Expliciter les conditions dans le cas de quatre points.

3.3.2. *Remarque.* L'assertion "$\exists i \in \{0, \cdots, k\} \quad a_i \notin \mathrm{Aff}\{a_0, \cdots, \widehat{a_i}, \cdots, a_k\}$" n'implique pas l'indépendance affine des $k+1$ points. ♠. Donnez un exemple

3.4. **Définition.** *Soient E un espace affine de dimension n et V un sous-espace affine de dimension k. Un* **repère affine** *de V consiste en la donnée d'une* **suite** *de $k+1$ points $a_0, \cdots, a_k$ affinement indépendants de V.*

3.4.1. ♠. Montrez qu'alors le sous-espace affine $\mathrm{Aff}\{a_0, \cdots, a_k\}$ est égal à V.

3.4.2. ♠. Vérifiez que les points i, j, k forment un repère affine de E (cf. I.1.2.1 et 1.4.10).

> *Comme dans les espaces vectoriels un repère est donc "libre et générateur", mais attention, il faut un point de plus.*
>
> *Attention, un repère affine est une suite ordonnée de points.*

3.4.3. ♠. Montrez qu'un repère affine d'une droite est un couple de points distincts de la droite, un repère affine d'un plan un triplet de points non alignés du plan, un repère affine de l'espace de dimension 3 un quadruplet de points non coplanaires de cet espace.

3.5. **Proposition.** *Soient V un espace affine de dimension k et $a_0, \cdots, a_k$ des points de V. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- **(i)** $a_0, \cdots, a_k$ *forment un repère affine de V,*
- **(ii)** $\overrightarrow{a_0 a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_0 a_k}$ *forment une base de $\vec{V}$,*
- **(iii)** *Pour tout $i = 0, \cdots, k$ le point a_i n'appartient pas à $\mathrm{Aff}\{a_0, \cdots, \widehat{a_i}, \cdots a_k\}$ (n'est pas barycentre des points $\{a_0, \cdots, \widehat{a_i}, \cdots, a_k\}$).*

Démonstration. Cela résulte immédiatement de 3.3. □

3.5.1. ♠. Soit $V = \mathrm{Aff}\{a_0, \cdots, a_k\}$. Montrez qu'on peut extraire de $\{a_0, \cdots, a_k\}$ un repère de V. Montrez que tout espace affine admet (au moins) un repère affine.

3.6. **Coordonnées cartésiennes selon un repère.** Dans ce paragraphe on utilise un repère affine $a_0, a_1, \cdots, a_n$ de E mais on fait jouer un rôle particulier au point a_0 : c'est **l'origine** du repère.

Soit $m \in E$. On a l'égalité : $m = a_0 + \overrightarrow{a_0m}$, puis, comme les $\overrightarrow{a_0a_i}$ forment une base de $\vec{E}$, on écrit $\overrightarrow{a_0m} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{a_0a_i}$.

Définition. *Avec les notations ci-dessus, les λ_i sont appelées* **coordonnées (cartésiennes)** *du point m dans le repère $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$, d'origine a_0, de E.*

> *Choisir un repère dans un espace affine E de dimension n permet d'associer à chaque point m ses n coordonnées cartésiennes dans le repère, et ainsi d'identifier E avec $\mathbb{R}^n$.*
>
> *L'emploi des coordonnées cartésiennes permet toutes les opérations usuelles de la géométrie analytique. Son intérêt est de ramener un problème de géométrie à un calcul. C'est une méthode très puissante qu'on doit toujours penser à employer si on ne voit pas de solution géométrique plus rapide. On se reportera aux exercices pour voir comment écrire en termes de coordonnées des équations de droites, plans, etc.*
>
> *Cependant les coordonnées cartésiennes font jouer un rôle particulier à l'origine : cette dissymétrie peut compliquer inutilement une démonstration. Pour traiter analytiquement un problème où tous les points jouent le même rôle, il vaut mieux utiliser les coordonnées barycentriques que nous introduisons ci-dessous.*

3.7. **Coordonnées barycentriques.**

Proposition et définition. *Soient $a_0, \cdots, a_r$ des points de E* **affinement indépendants** *tels que $(a_0, \cdots, a_r)$ soit un repère du sous-espace affine engendré $V = \mathrm{Aff}\{a_0, \cdots, a_r\}$. Alors tout point m de V s'écrit, de manière unique, comme barycentre des points a_i affectés de masses λ_i avec $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1$. Les réels λ_i s'appellent les* **coordonnées barycentriques** *de m sur le repère $(a_0, \cdots, a_r)$ de V.*

Démonstration. Il reste à prouver l'unicité de l'écriture de m comme barycentre. D'après la définition (iv) du barycentre, supposons qu'on ait à la fois :

$$\overrightarrow{a_0m} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i . \overrightarrow{a_0a_i} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{a_0m} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i . \overrightarrow{a_0a_i} \quad \text{où} \quad \sum_{i=0}^{r} \lambda_i = \sum_{i=0}^{r} \mu_i = 1$$

Alors, comme $a_0, \cdots, a_r$ est un repère, les vecteurs $\overrightarrow{a_0a_i}$ sont linéairement indépendants, de sorte que l'on a $\lambda_i = \mu_i$ pour $i = 1, \cdots, r$. Enfin on en déduit $\lambda_0 = \mu_0$ grâce à la relation $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i = \sum_{i=0}^{r} \mu_i = 1$. $\square$

3.7.1. ♠. *Voici le genre de manipulations qu'il faut savoir effectuer :* Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère les trois points $a = (3,1)$, $b = (-1,2)$ et $c = (0,-1)$.

a. Montrez que (a,b,c) est un repère affine de $\mathbb{R}^2$.

b. Déterminez les points p et q de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées barycentriques dans (a,b,c) sont respectivement $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ et $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

c. Quelles sont les coordonnées barycentriques dans (a,b,c) du point r de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées cartésiennes dans $(a; \overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})$ sont $(2,1)$?

d. Donnez les coordonnées barycentriques dans (a,b,c) du barycentre g de $\{(p,1),(q,2),(r,5)\}$.

3.7.2. Le propriété de double associativité sur les barycentres (cf. 1.7.6) se traduit en termes de coordonnées barycentriques sous la forme suivante :

Proposition. *Soit $(a_0, \cdots, a_n)$ un repère affine de E et soient $b_0, \cdots, b_r$ des points de E. On suppose que b_j a pour coordonnées barycentriques $\lambda_{ij}, i = 0, \cdots, n$ sur le repère $(a_0, \cdots, a_n)$. Soit g le barycentre des b_j affectés des coefficients μ_j avec $\sum_{j=0}^{r} \mu_j = 1$. Alors les coordonnées barycentriques de g sur le repère $(a_0, \cdots, a_n)$ sont les nombres $\nu_i = \sum_{j=0}^{r} \mu_j \lambda_{ij}$ $(*)$.*
Si, de plus, on a $r = n$ et si $(b_0, \cdots, b_n)$ est aussi un repère affine de E (de sorte que les μ_j sont les

coordonnées barycentriques de g sur le repère $(b_0,\cdots,b_n)$), la formule $(*)$ décrit comment varient les coordonnées barycentriques de g dans le changement de repère.

3.7.3. ♠. Soit E le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x+y+z=1$, cf. I.1.2.1 et 1.4.10. Si $m=(x,y,z)$ est un point de E, quelles sont ses coordonnées barycentriques dans (i,j,k) ?

4. Compléments sous forme d'exercices

4.1. Concours et alignement.

4.1.1. ♣. On note α,β,γ les coordonnées barycentriques d'un point m du plan sur le repère a,b,c.

- **a.** On suppose que m n'est pas situé sur les droites $(bc),(ca),(ab)$. Traduire cette condition sur α,β,γ.
- **b.** On suppose les droites $(am),(bm),(cm)$ respectivement non parallèles à (bc), (ca), (ab). Traduire cette condition sur α,β,γ.
- **c.** Sous les hypothèses précédentes, on désigne par a',b',c' les intersections de $(am),(bm),(cm)$ avec $(bc),(ca),(ab)$. Calculer les coordonnées barycentriques de a',b',c' sur (a,b,c), puis celles de m sur (a,a') puis sur (b,b') et (c,c').

4.1.2. ♣. *Théorème de Céva.* Soient a, b et c trois points affinement indépendants d'un plan affine E (i.e. tels que $\dim(\mathrm{Aff}\{a,b,c\})=2$, cf. 3.2). On considère trois points a', b' et c' sur les droites (bc), (ac) et (ab) ; on suppose

$$a'\notin\{b,c\},\quad b'\notin\{a,c\}\quad\text{et}\quad c'\notin\{a,b\}.$$

Montrer que les droites (aa'), (bb') et (cc') sont concourantes ou parallèles si et seulement si le produit $\dfrac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}}\times\dfrac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}}\times\dfrac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}}$ vaut -1. (cf. IV.4.1 pour la définition du rapport de deux vecteurs)

Lorsque chaque rapport vectoriel vaut -1, on retrouve un résultat connu. Lequel ?

> *Contrairement au théorème de Thalès, le résultat précédent n'est pas explicitement au programme du CAPES. Il apparaît cependant très fréquemment dans les épreuves écrites (sous une forme plus ou moins dissimulée).*

4.1.3. ♣. *Théorème de Gergonne.* Même situation que Céva, on suppose $(aa'),(bb'),(cc')$ concourantes en m. Montrer que l'on a :

$$\frac{\overrightarrow{a'm}}{\overrightarrow{a'a}}+\frac{\overrightarrow{b'm}}{\overrightarrow{b'b}}+\frac{\overrightarrow{c'm}}{\overrightarrow{c'c}}=1.$$

4.2. ♣. **Equation barycentrique d'une droite.** Soient E un plan affine et (a,b,c) un repère de E. On appelle x et y les coordonnées cartésiennes d'un point m de E dans ce repère ($\overrightarrow{am}=x\overrightarrow{ab}+y\overrightarrow{ac}$) et α,β,γ les coordonnées barycentriques de m sur ce repère ($\alpha+\beta+\gamma=1$). On considère trois points m_1,m_2,m_3 du plan. Posons

$$D=\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\1&1&1\end{vmatrix}\quad\text{et}\quad\Delta=\begin{vmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\\\beta_1&\beta_2&\beta_3\\\gamma_1&\gamma_2&\gamma_3\end{vmatrix}$$

Montrer que les trois points m_1,m_2,m_3 sont alignés si et seulement si D ou Δ est nul.

En déduire que l'équation barycentrique d'une droite (c'est-à-dire la relation qui lie les coordonnées barycentriques de ses points) est de la forme $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0$ avec λ,μ,ν non tous égaux.

> *Beaucoup de figures géométriques (comme la droite, cf. ci-dessus) sont définies par une (ou plusieurs) relation(s) portant sur les coordonnées cartésiennes. En passant aux coordonnées barycentriques, on voit qu'on peut aussi définir la figure par une (ou plusieurs) relation(s) sur les coordonnées barycentriques. Pour certains problèmes le système de relations ainsi obtenu est plus simple en barycentrique qu'en cartésien.*

4.2.1. ♠. On reprend les notations de 4.1.1. Caractérisez sur leurs coordonnées barycentriques les points de la droite (aa') et ceux de la droite passant par m_0 et parallèle à (bc).

4.2.2. ♣. Soient un triangle abc, m et p les milieux respectifs de $[ab]$ et $[ac]$. On note e le milieu de $[cm]$, f le point d'intersection de (ae) et (bc), q le milieu de $[mf]$ et r celui de $[be]$. Montrer que p, q et r sont alignés.

4.2.3. ♡. Démontrez le théorème de Ménélaus (IV.772).

4.3. **Demi-droites.**

Définition. *Soient a et b deux points distincts de E. La demi-droite $[ab)$ est l'ensemble des points p de (ab) tels que le segment semi-ouvert $[bp[$ ($= [bp] - \{p\}$) ne contienne pas a.*

♣. Soit m un point de (ab). On a donc $\overrightarrow{am} = \lambda.\overrightarrow{ab}$ avec λ réel.

a) Montrez que $[ab)$ est l'ensemble des points m de (ab) tels que λ soit positif ou nul (on note $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{am}}{\overrightarrow{ab}}$, cf. IV.4.1).

b) Montrez que $[ab)$ est l'ensemble des points de (ab) dont la coordonnée barycentrique sur b dans le repère (a,b) est positive.

c) Montrez enfin que si (a,b,c) est un repère affine d'un plan affine E, alors $[ab)$ est l'ensemble des points m dont les coordonnées barycentriques sont de la forme $(\alpha,\beta,0)$, avec $\beta \geq 0$.

4.4. **Demi-plans.**

Définition. *Soient a, b et c trois points non alignés d'un plan affine E. Le demi-plan (fermé) délimité par (bc) et contenant a (noté E^+ dans la suite) est l'ensemble des points m de E tels que (bc) ne coupe pas $[am[$ (i.e. $(bc) \cap [am[= \emptyset$).*

4.4.1. ♠. Faites un dessin pour vous convaincre que cette définition correspond bien géométriquement à l'intuition d'un demi-plan. Qu'obtiendrait-on si dans la définition on remplaçait “ne coupe pas $[am[$” par “ne coupe pas $[am]$” ? Remarquez que a appartient à E^+.

> *Notre but est maintenant de transformer cette définition géométrique en une définition analytique ; nous nous donnons un repère affine (a',b',c') de E où a' est choisi comme origine. Nous allons caractériser les points de E^+, d'abord par leurs coordonnées cartésiennes, puis par leurs coordonnées barycentriques dans le repère (a',b',c').*

4.4.2. ♣. Dans le repère affine (a',b',c'), on suppose que l'équation de la droite (bc) est donnée par la forme affine f (cf. IV.2.6.5) :

$$m \in (bc) \Leftrightarrow f(m) = 0$$

et que $f(a)$ est positif. On veut montrer :

$$m \in E^+ \Leftrightarrow f(m) \geq 0$$

Soient m un point de E et ϕ_m la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\phi_m(t) = f(a + t\overrightarrow{am}).$$

(i) Montrez que ϕ_m est une fonction polynôme de degré au plus 1. Pour quels points m est-elle constante ? En déduire qu'une équation de la droite Δ passant par a et parallèle à (bc) est $f(m) = f(a)$.

(ii) Soit m tel que ϕ_m n'est pas constante, quand ϕ_m s'annule-t-elle ? Etudier son signe. En déduire que si m n'appartient pas à Δ, la droite (am) rencontre (bc) en un point unique p et que E^+ est l'ensemble des points m qui vérifient $f(m) \geq 0$. Explicitez cette écriture en coordonnées cartésiennes.

(iii) Montrez, à l'aide des définitions géométriques, que, si m n'est pas sur Δ, on a l'équivalence :

$$m \in E^+ \iff m \in [pa).$$

On cherche maintenant une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées barycentriques (α, β, γ) *de m dans le repère* (a, b, c) *pour que m appartienne à* E^+.

(iv) Appliquer les résultats précédents au cas où le repère affine choisi est (b, c, a) : déterminer f et $f(a)$.

(v) Caractériser les points de Δ et de E^+ par leurs coordonnées barycentriques.

(vi) Décrire l'ensemble des points vérifiant $\alpha = \frac{2}{3}$.

4.5. ♣. *Suite de 1.7.8.* Pour k égal à 1 ou 2, on pose :

$$a_k = b + \frac{k}{3}\overrightarrow{bc}, \quad b_k = c + \frac{k}{3}\overrightarrow{ca}, \quad c_k = a + \frac{k}{3}\overrightarrow{ab}$$

c. Montrer que F contient les points $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$.

d. Donner un encadrement des coordonnées d'un point g de F dans le repère affine (a, b, c). Montrez que F est contenu dans un hexagone (intersection de 6 demi-plans) que l'on dessinera.

A suivre en III.2.6.4.

III. CONVEXITÉ

1. Définition et propriétés

1.1. **Définition.** *Une partie X de E est dite* **convexe** *si pour tous points a et b de X, le segment $[ab]$ est contenu dans X.*

1.2. **Exemples.** Démontrez les affirmations suivantes même si elles vous semblent évidentes.

1.2.1. ♠. Pour tous points a et b de E, le segment $[ab]$ est convexe. L'*intérieur* du segment $[ab]$ (noté $]ab[$) est le segment privé de ses extrémités. Montrez que c'est un convexe.

1.2.2. ♠. Un sous-espace affine de E est convexe.

1.2.3. ♠. Dans $\mathbb{R}$, les parties $[a,+\infty[$ et $]a,+\infty[$ sont convexes.

1.2.4. ♠. Dans un plan affine, un demi-plan (ouvert ou fermé) est convexe (voir II.3.7.2 et II.4.4).

1.3. **Exercices.**

1.3.1. ♣. *Jonction de deux convexes.* Soient A et B deux convexes non vides de E. On appelle "jonction" des deux convexes A et B l'ensemble $J(A,B)$ défini par :

$$J(A,B) = \{z \in E \mid \exists x \in A, \exists y \in B,\ z \in [xy]\}.$$

Montrer que C est convexe.

1.3.2. ♡. Montrez qu'une union croissante de convexes indexés par $\mathbb{N}$ est convexe. Plus généralement, si $(C_i)_{i\in I}$ est une famille de convexes telle que pour tous i, j il existe k avec $C_i \cup C_j \subset C_k$, alors l'union des C_i est convexe.

1.4. **Proposition.**

(i) *Si une partie est stable par barycentration à masses positives, elle est convexe.*

(ii) *Soient X un convexe de E, r un entier naturel non nul et $\{(a_1,\lambda_1),(a_2,\lambda_2), \ldots,(a_r,\lambda_r)\}$ une famille de points pondérés de X de masse totale non nulle. Si les masses λ_i sont toutes positives ou nulles alors le barycentre de la famille appartient à X.*

(iii) *L'intersection d'une famille de convexes est un convexe.*

Démonstration.
(i) résulte de la définition.
(ii) Nous allons démontrer ce résultat par récurrence sur r :

- La propriété est vraie pour $r = 1$ et $r = 2$ par définition.
- Soient $A_r = \{(a_1,\lambda_1),(a_2,\lambda_2),\ldots(a_r,\lambda_r)\}$ une famille de points pondérés de X de masse totale non nulle et g son barycentre.
  - Si l'une des masses est nulle, le barycentre g de A_r est le même que celui d'une famille de $r-1$ points donc si le barycentre de $r-1$ points affectés de masses positives est dans X celui de A_r l'est aussi.
  - Sinon, λ_r n'est pas nul et la famille $A_{r-1} = \{(a_1,\lambda_1),(a_2,\lambda_2),\ldots(a_{r-1},\lambda_{r-1})\}$ est de masse totale non nulle. Si X vérifie la propriété pour $r-1$ points affectés de masses positives, le barycentre g' de A_{r-1} est dans X. Alors, par l'associativité des barycentres, g appartient au segment $[g',a_r]$ et donc à X.

On a donc montré que si X contient le barycentre de $r-1$ de ses points affectés de masses positives, il contient le barycentre de r de ses points affectés de masses positives, or X contient tout segment dont il contient les extrémités, par récurrence on a donc obtenu la propriété (ii).

(iii) Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de convexes et C leur intersection. Si a et b sont deux points de C, cela signifie que a et b sont dans chacun des C_i. Par hypothèse, chaque C_i est convexe ; donc pour tout $i \in I$ on a $[ab] \subset C_i$. L'inclusion ayant lieu pour tout $i \in I$ on a en fait $[ab] \subset C$. Ainsi C est bien convexe. □

> *Ainsi, une partie est convexe si et seulement si elle est stable par barycentration à masses positives. On notera l'analogie avec les sous-espaces affines.*

2. Enveloppe convexe

2.1. **Définition.** *Soit X une partie de E. L'intersection des convexes contenant X est un convexe et c'est le plus petit convexe contenant X. On l'appelle l'***enveloppe convexe** *de X et on le note* $\mathrm{Conv}X$.

2.2. **Remarques.**

2.2.1. Notez l'analogie avec le sous-espace affine engendré, le sous-espace vectoriel engendré, mais aussi avec le sous-groupe engendré, l'adhérence (i.e. le fermé engendré), la tribu engendrée ...

2.2.2. Pour déterminer l'enveloppe convexe de X, on choisit un convexe pas trop gros $\tilde{X}$ qui contient X et on essaye de montrer qu'il est contenu dans tout convexe contenant X ; la démonstration de la proposition suivante donne un exemple de ce procédé.

2.3. **Proposition.** *L'enveloppe convexe de X est l'ensemble des barycentres des familles finies de points de X affectés de masses positives.*

Démonstration. On note $\tilde{X}$ l'ensemble des barycentres des familles finies de points de X affectés de masses positives. D'après la propriété 1.4 (ii) des convexes, $\tilde{X}$ est contenu dans $\mathrm{Conv}X$. Evidemment, $\tilde{X}$ contient bien X (les singletons étant des parties finies particulières).

Pour conclure, il reste à montrer que $\tilde{X}$ est convexe . Soient a et b deux points de $\tilde{X}$: il existe donc deux suites finies de points $a_0,\cdots,a_n$ et $b_0,\cdots,b_m$ ainsi que deux suites finies de réels (strictement) positifs $s_0,\cdots,s_n$ et $t_0,\cdots,t_m$ (avec $\Sigma_{i=0}^n s_i = \Sigma_{j=0}^m t_j = 1$) tels que $a = \Sigma_{i=0}^n s_i a_i$ et $b = \Sigma_{j=0}^m t_j b_j$. Un point p du segment $[ab]$ est de la forme $p = \lambda a + (1-\lambda)b$ avec $\lambda \in [0;1]$. Nous pouvons appliquer ici le théorème de double associativité pour les barycentres : nous obtenons que p est le barycentre de la famille $(a_0,\cdots,a_n,b_0,\cdots,b_m)$ affectée des coefficients $(\lambda.s_0,\cdots,\lambda.s_n,(1-\lambda).t_0,\cdots,(1-\lambda).t_m)$. En particulier, p est barycentre d'une famille finie de points de X affectée de coefficients strictement positifs. Donc $p \in \tilde{X}$.

2.4. **Triangle.**

2.4.1. **Définition.** *Soient a, b et c trois points affinement indépendants d'un plan affine. Le* **triangle (plein)** *abc est l'enveloppe convexe des points a, b et c. Les* **sommets du triangle** *abc sont les points a, b et c. Les* **côtés** *de abc sont les segments $[ab]$, $[ac]$ et $[bc]$.*

2.4.2. **Corollaire.** *Le triangle abc est l'ensemble des points m dont les coordonnées barycentriques dans le repère (a,b,c) sont positives ou nulles.*

Démonstration. Résulte de la proposition 2.3 et de la définition des coordonnées barycentriques. □

2.5. **Exemples.**

2.5.1. ♠. Montrer, par l'exemple du triangle plein, qu'en général l'enveloppe convexe d'une partie X n'est pas l'union des segments d'extrémités appartenant à X.

On a cependant :

2.5.2. ♠. Montrez que, si A et B sont convexes, $J(A,B)$ (voir 1.3.1) est l'enveloppe convexe de $A \cup B$.

2.5.3. ♠. Montrer que si A est convexe et b un point de E, $\mathrm{Conv}\,(A \cup \{b\})$ est la réunion des segments $[ab]$ où a parcourt A.

2.6. **Exercices.**

2.6.1. ♣. Déterminer $\mathrm{Conv}\,(A)$ si A est la réunion de la droite $\{(x,y)/y=0\}$ et du point $(0,1)$ dans $\mathbb{R}^2$. L'enveloppe convexe d'une partie fermée de $\mathbb{R}^2$ est-elle toujours fermée ?

2.6.2. ♣. Soient A et B deux parties de E. Étudier les inclusions entre $\mathrm{Conv}\,(A \cap B)$, $\mathrm{Conv}\,(A) \cap \mathrm{Conv}\,(B)$ et $\mathrm{Conv}\,(\mathrm{Conv}\,(A) \cap \mathrm{Conv}\,(B))$.

2.6.3. ♣. Si une partie A finie est contenue dans une droite D, montrer que $\mathrm{Conv}(A)$ est l'union des segments d'extrémités appartenant à A.

Montrer que le résultat reste valable avec A non nécessairement finie (écrire A comme l'union de ses parties finies).

2.6.4. ♣. *Suite et fin de II.4.5*

e. Montrer que F est contenu dans l'enveloppe convexe C des points $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$.

f. Montrer que F est convexe et conclure.

3. Convexité et topologie

> *La topologie et la théorie des convexes sont souvent étroitement liées. La raison principale de ce fait est que la topologie de $\mathbb{R}^n$ est définie à l'aide des boules associées à une norme, or celles-ci sont des convexes. Nous rappelons ci-dessous quelques faits importants.*

3.1. **Normes.** ♠ Rappelez les axiomes définissant une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$.

On montre que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes (rappelez ce que cela signifie). Cela implique que les ouverts (i.e. réunions de boules ouvertes) pour ces normes sont les mêmes.

3.1.1. ♠. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrez que les boules (ouvertes et fermées) de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ sont convexes.

3.1.2. ♠. Montrez que l'enveloppe convexe d'une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ est bornée. (Ecrire la définition d'une partie bornée de $\mathbf{R}^n$ en terme de boules.)

3.2. **Intérieur d'un triangle.**

3.2.1. **Proposition.** L'intérieur (topologique) du triangle abc est l'ensemble des points m de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées barycentriques (α, β, γ) dans le repère (a,b,c) sont strictement positives.

Démonstration. Soit P_a (resp. P_b, P_c) le demi-plan fermé $\{m \in \mathbf{R}^2, \alpha \geq 0\}$ (resp. $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$). Le triangle abc est l'intersection des trois demi-plans de P_a, P_b et P_c donc son intérieur (topologique) est l'intersection des trois demi-plans ouverts, intérieurs de P_a, P_b et P_c, c'est-à-dire l'ensemble des points m de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées barycentriques (α, β, γ) dans le repère (a,b,c) sont strictement positives. □

3.2.2. ♠. L'intérieur de abc est encore convexe.

3.2.3. ♠. Si un point m est situé sur un segment $]ap[$, avec $p \in]bc[$, alors m est dans l'intérieur de abc. Réciproque ?

3.3. **Exercices.**

3.3.1. ♣. Montrer que l'adhérence d'un convexe est convexe.

3.3.2. ♣. Montrer que l'intérieur d'un convexe est convexe.

3.3.3. ♣. Soit (a,b,c) un repère d'un plan affine E. On note $(\alpha_p,\beta_p,\gamma_p)$ les coordonnées barycentriques d'un point p de E dans ce repère. On considère trois nombres réels positifs α_0, β_0, γ_0 et leur somme σ_0. On pose alors :

$$T(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0) = \{p \in E, \alpha_p \geq \alpha_0, \beta_p \geq \beta_0, \gamma_p \geq \gamma_0\}$$

a. Identifier $T(0,0,0)$ et $T(1,0,0)$.

b. Montrer que $T(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0)$ est convexe et qu'il est non vide si et seulement si $\sigma_0 \leq 1$. Que dire lorsque $\sigma_0 = 1$?

c. Montrer que dans la cas : $\sigma_0 < 1$, $T(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0)$ est le triangle pqr (avec $\beta_p = \beta_0$, $\gamma_p = \gamma_0$, $\alpha_q = \alpha_0$, $\gamma_q = \gamma_0$, $\alpha_r = \alpha_0$ et $\beta_r = \beta_0$). Comparer les directions des côtés de abc et pqr.

3.3.4. ♡. Si un convexe C de $\mathbb{R}^2$ est d'intérieur non vide, alors il est contenu dans l'adhérence de son intérieur. Cas où C est fermé ?

3.3.5. ♡. Si une partie F de $\mathbb{R}^2$ est fermée et stable par milieux (*i*.e. pour p, q dans F, le milieu de $[pq]$ est aussi dans F), alors F est convexe.

3.3.6. ♡. Montrer que l'enveloppe convexe d'une partie finie de $\mathbf{R}^2$ est compacte (on peut par exemple procéder par récurrence sur le cardinal de la partie finie et utiliser 2.5.3). Ainsi un triangle, un tétraèdre ou un cube (pleins) sont compacts.

IV. APPLICATIONS AFFINES

1. Applications affines : Définition

1.1. **Théorème et définition.** *Soient E et F deux espaces affines et f une application de E dans F. On dit que f est une* **application affine** *s'il existe un point a de E et une application linéaire $\vec{f}$ de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ tels que, pour tout point x de E, on ait la formule :*

$$f(x) = f(a) + \vec{f}(\overrightarrow{ax}). \tag{1}$$

Alors, l'application linéaire $\vec{f}$ est unique et, pour tout point b de E, on a aussi :

$$f(x) = f(b) + \vec{f}(\overrightarrow{bx}).$$

On dit que $\vec{f}$ est l'application linéaire associée à f ; elle vérifie les deux formules :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \vec{f}(\overrightarrow{xy}) = \overrightarrow{f(x)f(y)}. \tag{2}$$

$$\forall a \in E, \forall \vec{v} \in \vec{E}, f(a+\vec{v}) = f(a) + \vec{f}(\vec{v}). \tag{3}$$

Démonstration. On a, pour tout $x \in E$ la formule (1) : $f(x) = f(a) + \vec{f}(\overrightarrow{ax})$. Montrons qu'on a la même formule en remplaçant a par un point $b \in E$ quelconque. Par Chasles on a $\overrightarrow{ax} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bx}$. Comme $\vec{f}$ est linéaire on en déduit :

$$f(x) = f(a) + \vec{f}(\overrightarrow{ab}) + \vec{f}(\overrightarrow{bx}),$$

d'où la conclusion puisque par (1), on a $f(b) = f(a) + \vec{f}(\overrightarrow{ab})$.

Les formules (2) et (3) sont des conséquences immédiates de (1). □

1.1.1. △. Attention, si f est une application de E dans F et a un point de E on peut toujours définir une fonction vectorielle $\vec{f_a}$ par la formule déduite de (3) : $\vec{f_a}(\vec{v}) = \overrightarrow{f(a)f(a+\vec{v})}$, mais cette fonction n'a aucune raison d'être linéaire et elle dépend a priori du point a. Par exemple, dans le cas $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$ et $f(x,y) = x^2 + y^2$, calculez $\vec{f}_{(0,0)}$ et $\vec{f}_{(1,-1)}$ et vérifiez qu'elles sont différentes et non linéaires.

1.1.2. On reprend l'espace E de l'exemple I.1.2.1 et on définit une application f de E dans $\mathbb{R}^3$ par $f((x,y,z)) = (2x+y-2, x+y, 2+z-y-2x)$. Vérifiez que f envoie E dans E et que f est une application affine de E dans E.

> *La proposition suivante est essentielle. Elle montre qu'une application affine est définie par la donnée d'une application linéaire et de l'image d'un point. Elle sera utilisée pour exhiber de nombreux exemples.*

1.2. **Proposition.** *Soient $\vec{f}$ une application linéaire de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$, a un point de E et b un point de F. Il existe une* **unique** *application affine f de E dans F, vérifiant $f(a) = b$ et d'application linéaire associée $\vec{f}$. Cette application est définie par la formule*

$$\forall x \in E, \quad f(x) = b + \vec{f}(\overrightarrow{ax}).$$

♠ Démontrez cette proposition.

> *Les exemples d'applications affines qui suivent (translation, homothétie, projection, symétrie) vous sont déjà familiers et vous en avez vu des définitions géométriques dans l'enseignement secondaire. Nous en proposons ici une approche qui s'appuie sur la proposition précédente. Nous espérons vous convaincre que l'algèbre linéaire est un outil puissant qui vous permettra, lorsque vous serez professeur, de comprendre les situations plus vite que vos élèves.*

2.1. **Translation.** Soit E un espace affine. Les translations de E sont des applications affines. En effet, si t est la translation de vecteur $\vec{v}$, on a, pour tout point x de E : $t(x) = x + \vec{v}$. Choisissons un point $a \in E$. On a aussi $t(a) = a + \vec{v}$, donc $t(x) = a + \overrightarrow{ax} + \vec{v} = t(a) + \overrightarrow{ax}$, de sorte que t est bien affine d'application linéaire associée l'identité de $\vec{E}$: $\vec{t} = \mathrm{Id}_{\vec{E}}$. En particulier, l'identité est une application affine.

2.1.1. ♠. Que suffit-t-il de connaître pour connaître une translation ?

2.1.2. ♠. Montrez que si f est une application affine d'application linéaire associée l'identité de $\vec{E}$, alors f est une translation.

> *Ainsi, une application affine $f : E \longrightarrow E$ est une translation si et seulement si $\vec{f}$ est l'identité de $\vec{E}$.*

2.2. **Homothétie (affine).**

Définition. *Soient E un espace affine, c un point de E et λ un réel non nul. L'***homothétie (affine) de centre** c **et de rapport** λ *est définie comme l'application affine $h(c,\lambda)$ qui fixe le point c et dont l'application linéaire associée est l'homothétie vectorielle $\vec{h}_\lambda$ donnée par $\vec{h}_\lambda(\vec{v}) = \lambda.\vec{v}$.*

Si $\lambda = 1$, $h(c,\lambda)$ est l'identité (et ceci quel que soit le point c de E).

Si le rapport est -1, $h(c,\lambda)$ est appelée **symétrie de centre** c *et notée σ_c.*

En vertu de 1.2, ces données définissent bien une application affine.

2.2.1. ♠. On peut traduire géométriquement cette définition de la façon suivante qui est la définition donnée dans l'enseignement secondaire :

Si m' est l'image de m par $h(c,\lambda)$, on a l'égalité : $\overrightarrow{cm'} = \lambda.\overrightarrow{cm}$. Montrez-le.

2.2.2. ♠. Par la donnée de combien de points et de leurs images une homothétie est-elle déterminée ? (Voir 4.3.)

2.3. **L'ensemble des homothéties et des translations de** E**.**

Proposition et définition. *Soient E un espace affine et f de E dans E une application affine. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est une homothétie ou une translation,*

(ii) *$\vec{f}$ est une homothétie vectorielle (de rapport non nul).*

On note $HT(E)$ l'ensemble des homothéties et des translations de E.[6]

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$: par construction pour les homothéties et on l'a déjà vérifié pour les translations ci-dessus.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Soit f une application affine de E dans E dont l'application linéaire associée est une homothétie vectorielle de rapport λ non nul.

[6] Certains auteurs appellent dilatations les transformations de $HT(E)$.

Si $\lambda = 1$, cela signifie que $\vec{f} = \mathrm{Id}_{\vec{E}}$. Donc pour tout $(a,b) \in E^2$, $\overrightarrow{f(a)f(b)} = \overrightarrow{ab}$ et d'après la relation du parallèlogramme $\overrightarrow{bf(b)} = \overrightarrow{af(a)}$. Ainsi le vecteur $\overrightarrow{xf(x)}$ est indépendant de $x \in E$. Si on le note $\vec{v}$, on a pour tout x de E $f(x) = x + \vec{v}$, c'est à dire $f = t_{\vec{v}}$.

Supposons maintenant $\lambda \neq 1$ et montrons que f admet un point fixe unique (cf. aussi 7.2.3). Fixons une origine ω dans E. Alors pour tout $c \in E$, on a $f(c) = f(\omega) + \lambda\overrightarrow{\omega c}$. Donc c est point fixe de f si et seulement si $\overrightarrow{f(\omega)c} = \lambda\overrightarrow{\omega c}$, soit $(1-\lambda)\overrightarrow{f(\omega)c} = \lambda\overrightarrow{\omega f(\omega)}$. Puisque $\lambda \neq 1$, l'équation précédente admet une unique solution, le point $c = f(\omega) + \dfrac{\lambda}{1-\lambda}\overrightarrow{\omega f(\omega)}$. L'application affine f fixe un point c et a pour application linéaire associée l'homothétie vectorielle de rapport λ donc f est l'homothétie $h(c,\lambda)$ d'après 1.2. □

| *Comme souvent, on est passé au vectoriel pour caractériser une propriété affine.*

2.4. **Projection affine.**

Définition. *Soient V un sous-espace affine d'un espace affine E, $c \in V$ et $\overrightarrow{W}$ un supplémentaire de $\vec{V}$ dans $\vec{E}$. La* **projection (affine) sur** V **parallèlement à** $\overrightarrow{W}$ *est définie comme l'application affine $p_{V,\vec{W}}$ qui fixe c et dont l'application linéaire associée est la projection vectorielle $\vec{p}_{\vec{V},\vec{W}}$ sur $\vec{V}$ parallèlement à $\overrightarrow{W}$.*

2.4.1. *Remarque.* Si W est un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{W}$, on peut aussi appeler $p_{V,\vec{W}}$ la projection (affine) sur V parallèlement à W et la noter $p_{V,W}$.

2.4.2. ♠. Vérifiez que $p_{V,\vec{W}}$ fixe V point par point.

2.4.3. ♠. Montrez que la définition précédente ne dépend pas du choix du point $c \in V$.

2.4.4. ♠. Rappelons que deux sous-espaces affines de E de directions $\vec{V}$ et $\overrightarrow{W}$ supplémentaires se coupent en un point et un seul (cf. I.4.1.5).

Montrez que $p_{V,\vec{W}}$ associe à un point m de E l'unique point m' tel que $V \cap (m + \overrightarrow{W}) = \{m'\}$. Cela signifie encore que m' est l'unique point de V tel que $\overrightarrow{mm'}$ soit dans $\overrightarrow{W}$.

2.5. **Symétrie affine.**

Définition. *Soient V un sous-espace affine d'un espace affine E, $c \in V$ et $\overrightarrow{W}$ un supplémentaire de $\vec{V}$ dans $\vec{E}$. La* **symétrie (affine ou oblique) par rapport à** V **parallèlement à** $\overrightarrow{W}$ *est définie comme l'application affine $\sigma_{V,\overrightarrow{W}}$ qui fixe c et dont l'application linéaire associée est la symétrie vectorielle $\vec{\sigma}_{\vec{V},\overrightarrow{W}}$ par rapport à $\vec{V}$ parallèlement à $\overrightarrow{W}$.*

2.5.1. *Remarque.* Si W est un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{W}$, on peut aussi appeler $\sigma_{V,\vec{W}}$ la symétrie (affine) par rapport à V parallèlement à W et la noter $\sigma_{V,W}$.

2.5.2. ♠. Une symétrie centrale de E de centre c est une symétrie affine avec $V = \ldots$ et $\overrightarrow{W} = \ldots$?

2.5.3. ♠. Vérifiez que $\sigma_{V,\overrightarrow{W}}$ fixe V point par point.

2.5.4. ♠. Montrez que la définition précédente ne dépend pas du choix du point $c \in V$.

2.5.5. ♠. Soit m un point de E ; on pose $\sigma_{V,\overrightarrow{W}}(m) = m'$. Montrez que m' est caractérisé par l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

(i) $\overrightarrow{mm'} \in \overrightarrow{W}$ et le milieu de $[mm']$ appartient à V,

(ii) le milieu de $[mm']$ est le projeté $p_{V,\overrightarrow{W}}(m)$ de m.

2.6. **Linéaire et affine.** Comme pour les sous-espaces, le linéaire est un cas particulier de l'affine :

2.6.1. ♠. Soient $\vec{E}$ et $\vec{F}$ deux espaces vectoriels munis de leurs structures affines canoniques. Montrez qu'une application linéaire f de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ est affine, qu'une application constante est affine et que, réciproquement, toute application affine de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ est somme d'une application linéaire et d'une application constante.

2.6.2. ♡. *Utilisation de la fonction vectorielle de Leibniz pour définir le barycentre.* Soit E un espace affine de direction vectorielle $\vec{E}$ et $\{(a_0,\lambda_0),\cdots,(a_k,\lambda_k)\}$ une famille de points pondérés de masse $\Lambda=\Sigma\lambda_i$. On définit une fonction de $\mathcal{L}$ de E dans $\vec{E}$ par $\mathcal{L}(m)=\Sigma\lambda_i\overrightarrow{ma_i}$.

- **a.** Montrer que $\mathcal{L}$ est une application affine de E dans $\vec{E}$, d'application linéaire associée l'homothétie de rapport $-\Lambda$ (ici $\vec{E}$ est muni de sa structure canonique d'espace affine).
- **b.** En déduire que $\mathcal{L}$ est constante si $\Lambda=0$ et bijective sinon.
- **c.** Lorsque Λ n'est pas nul, montrer qu'il existe un unique g dans E tel que $\mathcal{L}(g)=\vec{0}$ et vérifier que g a toutes les propriétés du théorème II.1.3.

2.6.3. ♠. Quelles sont les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? et les applications affines ? (On les écrira analytiquement.) Montrez que toute application affine d'une droite dans elle-même est soit une application constante, soit une translation, soit une homothétie.

2.6.4. ♠. Montrez que les applications affines de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ sont les fonctions du type :

$$(x,y,z)\mapsto(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta,\alpha' x+\beta' y+\gamma' z+\delta')$$

où α, β, γ, δ, α', β', γ', δ' sont des réels.

2.6.5. ♠. Donnez la forme générale des applications affines de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ et montrez qu'elles sont continues. Cas particulier où $p=1$ (on parle alors de forme affine ; d'ailleurs, l'application linéaire associée est une ....).

2.7. **Détermination d'une application affine.** On a vu en 1.2 qu'une application affine est donnée par l'image d'un point et par l'application linéaire associée. En fait, pour définir une application affine il suffit de se donner l'image d'un repère comme le montre la proposition suivante :

2.7.1. **Proposition.** *Soient E et F deux espaces affines, $(a_0,a_1,\cdots,a_n)$ un* **repère** *de E et $b_0,b_1,\cdots,b_n$ des* **points quelconques** *de F. Alors, il existe une unique application affine f de E dans F qui vérifie pour tout i dans $\{0,1,\cdots,n\}$, $f(a_i)=b_i$.*

Démonstration. Comme $a_0,a_1,\cdots,a_n$ est un repère de E, $\{\overrightarrow{a_0a_1},\cdots,\overrightarrow{a_0a_n}\}$ est une base de $\vec{E}$. Soit $\vec{f}$ l'application linéaire de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ définie sur cette base par

$$\vec{f}(\overrightarrow{a_0a_i})=\overrightarrow{b_0b_i}\qquad\forall i\in\{1,\dots n\}.$$

Alors, il est clair que l'application affine définie par l'égalité $f(a_0)=b_0$ et par cette application linéaire $\vec{f}$ est l'unique application affine qui envoie les points $a_0,a_1,\cdots,a_n$ sur les points $b_0,b_1,\cdots,b_n$. □

2.7.2. ♠. Que dire d'une application affine qui fixe les sommets d'un triangle de $\mathbb{R}^2$?

2.7.3. ♠. *Prolongement des identités.* Soient f et g deux applications affines de E dans F et A une partie (finie ou non) de E. On suppose qu'on a $f(a)=g(a)$ pour tout $a\in A$. Montrez qu'on a $f(b)=g(b)$ pour tout $b\in\operatorname{Aff}A$.

Application : Soit une application affine $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ qui conserve l'ensemble de trois points non alignés $\{a,b,c\}$ et échange deux points parmi ces trois, quelle est la nature de f ? Que dire si les trois points sont distincts et alignés ?

2.7.4. ♣. *Nouvelle méthode pour l'exercice III.3.3.6* On considère une partie finie $A = \{a_0, \cdots, a_k\}$ non vide dans l'espace affine $E = \mathbb{R}^2$. On veut montrer que l'enveloppe convexe C de A est compacte. On note E_k le sous-espace affine de $\mathbb{R}^{k+1}$ formé des points $(x_0, \cdots, x_k)$ tels que $x_0 + \cdots + x_k = 1$ et on appelle e_i le point $(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ de E_k (le 1 est à la $i+1$-ème place).

a. Montrer qu'il existe une application affine et une seule f de E_k dans E telle que $f(e_i) = a_i$.

b. Montrer que l'ensemble $\Sigma_k = \{(x_0, \cdots, x_k) \in E_k, \forall i = 0 \ldots k, x_i \geq 0\}$ est compact et que c'est l'enveloppe convexe des points $e_0, \cdots, e_k$. On appelle Σ_k le *simplexe standard de dimension* k. Ainsi, le résultat est vrai pour le simplexe standard.

c. Montrer que $f(\Sigma_k) = C$.

d. Conclure (utiliser 2.6.5).

2.8. **Représentation matricielle d'une application affine.**

> *Le ressort de la démonstration de 2.7, c'est le fait qu'une application linéaire est déterminée par l'image des vecteurs d'une base ou encore qu'une application linéaire est déterminée par sa matrice (dans des bases fixées). De cette façon, l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est en bijection naturelle avec l'espace des matrices à n colonnes et p lignes.*
>
> *Il y a une représentation analogue pour les applications affines de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ qui correspond à la décomposition des applications affines comme somme d'applications linéaires et d'applications constantes (cf. 2.6).*

Soit $\mathcal{A}_{p,n}$ l'ensemble des couples (A, B), où A est une matrice à n colonnes et p lignes et B est une matrice colonne à p lignes. Si (A, B) est dans $\mathcal{A}_{p,n}$, considérons l'application $f_{A,B}$ qui à un point $x = (x_1, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ associe le point $y = (y_1, \cdots, y_p)$ défini par $Y = AX + B$ (où X et Y sont les vecteurs colonnes correspondant à x et y).

2.8.1. ♠. Montrez que l'application $f_{A,B}$ est affine ; donnez son application linéaire associée. A quoi correspond le point b dont le vecteur colonne est B ?

2.8.2. ♠. Montrez que l'application $(A, B) \mapsto f_{A,B}$ est une bijection de $\mathcal{A}_{p,n}$ sur l'ensemble des applications affines de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Analogie avec $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$?

> *Autrement dit, se donner une application affine de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, c'est se donner une matrice à n colonnes et p lignes ainsi qu'une matrice colonne à p lignes.*

3.1. Application affine et sous-espace affine.

3.1.1. **Proposition.** *Soit f une application affine de E dans F. Alors l'image par f d'un sous-espace affine de E est un sous-espace affine de F. Précisément, on a la formule :*

$$f(a+\vec{V}) = f(a) + \vec{f}(\vec{V}).$$

Démonstration.
Il suffit de montrer la formule ci-dessus qui résulte aussitôt de l'égalité $f(a+\vec{v}) = f(a)+\vec{f}(\vec{v})$. □

3.1.2. *Préservation de l'alignement.*

Corollaire. *Soit f une application affine de E dans F. Si trois (resp. quatre) points sont alignés (resp. coplanaires) dans E alors leurs images par f sont alignées (resp. coplanaires) dans F.*

Démonstration. Les points considérés dans E sont dans un sous-espace affine V de dimension 1 ou 2, donc, d'après 3.1.1 leurs images sont dans le sous-espace affine $f(V)$, de même dimension que $\vec{f}(\vec{V})$, donc inférieure ou égale à celle de V. Ceci conclut. □

En particulier, une application affine conserve l'alignement.

3.1.3. ♠. Si f est une application affine de E dans F et D une droite de E, le sous-espace $f(D)$ est-il nécessairement une droite ? Discutez.

3.1.4. **Corollaire.** *Les homothéties de rapport non nul et les translations transforment une droite affine en une droite parallèle.*

Démonstration. Si f est une homothétie ou une translation et D une droite de E, alors $f(D)$ est un sous-espace affine de E de direction $\vec{h}(\vec{D})$, où $\vec{h}$ est l'homothétie vectorielle (de rapport non nul) associée à f. Or pour une telle homothétie on a $\vec{h}(\vec{D}) = \vec{D}$, donc par définition $f(D)$ est une droite parallèle à D. □

3.1.5. Réciproque ? (voir 6.4.1.)

3.1.6. ♠. Quelles sont les droites affines globalement invariantes par une homothétie, une translation, une symétrie ?

3.2. Application affine et barycentres.

3.2.1. **Proposition.** *Soit $\{(x_1,\lambda_1),(x_2,\lambda_2),\dots(x_r,\lambda_r)\}$ une famille de points pondérés de E de* **masse totale non nulle** *et de barycentre x et f une application affine de E dans F. Alors $f(x)$ est le barycentre des points $f(x_i)$ affectés des masses λ_i.*

On dit qu'une application affine **"conserve les barycentres"**. *En particulier, elle conserve les milieux.*[7]

Démonstration. On part de la relation $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i\overrightarrow{xx_i} = \vec{0}$ qui exprime que x est barycentre des x_i et on lui applique $\vec{f}$. On obtient, en utilisant la linéarité et la relation entre f et $\vec{f}$:

$$\sum_{i=0}^{r}\lambda_i\vec{f}(\overrightarrow{xx_i}) = \sum_{i=0}^{r}\lambda_i\overrightarrow{f(x)f(x_i)} = \vec{0}$$

et cette dernière relation exprime que $f(x)$ est barycentre des $f(x_i)$ affectés des masses λ_i. □

[7] et pourtant, *a priori* elle ne conserve pas les distances, même s'il y a une notion de distance, ce qui n'est pas le cas dans un espace affine général

3.2.2. ♠. A l'aide de cette proposition, redémontrez que l'image d'un sous-espace affine est un sous-espace affine.

3.2.3. ♠. Montrez que l'image directe d'un convexe par une application affine est un convexe.

3.2.4. ♠. Montrez que l'image réciproque d'un sous-espace affine (si elle n'est pas vide) (resp. d'un convexe) par une application affine est encore un sous-espace affine (resp. un convexe).

3.2.5. ♣. Soit une application affine f de E dans E.

a. Montrez que si on a $f \circ f = f$, alors f admet un point fixe.

b. Montrez que si f est involutive (c'est-à-dire vérifie $f \circ f = \mathrm{Id}_E$), alors f admet un point fixe que l'on cherchera comme barycentre. *A suivre en 5.1.3*

3.2.6. ♣. *Fonction "barycentre d'une famille de points donnée".* Soit E un espace affine quelconque. On reprend les notations E_k, e_i du 2.7.4. On suppose que $\{a_0, \cdots, a_k\}$ est une famille de $k+1$ points de E et on considère l'application b de E_k dans E qui à $(x_0, \cdots, x_k)$ associe le barycentre du système $\{(a_0,x_0), \cdots, (a_k,x_k)\}$.

a. Montrer que b est l'unique application affine de E_k dans E telle que $b(e_i) = a_i$. Expliciter l'image et le noyau de $\vec{b}$.

b. Montrer que $b(E_k) = \mathrm{Aff}\{a_0, \cdots, a_k\}$ et que b est injective si et seulement si les points a_i sont affinement indépendants.

c. On suppose maintenant que $(a_0, \cdots, a_k)$ est un repère affine.

(i) Déduire de ce qui précède que tout point m de E est barycentre des a_i affectés de coefficients x_i de somme 1, et ce d'une unique façon (on retrouve l'existence et l'unicité des coordonnées barycentriques).

(ii) Montrer que la fonction qui à un point m associe sa i-ème coordonnée barycentrique $x_i(m)$ dans le repère $(a_0, \cdots, a_k)$ est une forme affine sur E. Si m est le milieu de p et q, relier $x_i(m)$ à $x_i(p)$ et $x_i(q)$.

3.2.7. ♡. Montrez la réciproque de la proposition 3.2.1.
(*Indication :* Si une application f de E dans F préserve la barycentration, choisir un repère quelconque $(a_0, \cdots, a_k)$ de E, considérer l'unique application affine g de E dans F telle que $g(a_i) = f(a_i)$ et montrer l'égalité $f = g$).

4. Théorème de Thalès

4.1. **Notation : Rapport de deux vecteurs colinéaires.** Soient $\vec{v}$ un vecteur non nul de $\vec{E}$ et $\vec{u}$ un vecteur colinéaire à $\vec{v}$. Il existe donc un réel λ tel que l'on ait : $\vec{u} = \lambda\vec{v}$; dans ce texte, on notera $\lambda = \dfrac{\vec{u}}{\vec{v}}$.

△ *Attention*, cette notation sous-entend toujours que $\vec{v}$ est un vecteur non nul et que $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$.

4.2. Théorème de Thalès.

4.2.1. **Théorème.** *Soient E un espace affine, H, H', H'' trois hyperplans de E, parallèles et distincts et D une droite non faiblement parallèle à H. Posons :*

$$D \cap H = \{a\}, \quad D \cap H' = \{a'\}, \quad D \cap H'' = \{a''\}.$$

Alors, le réel $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{aa''}}{\overrightarrow{aa'}}$ ne dépend que des hyperplans H, H', H'' et non de la droite D.

Démonstration. Soit Δ une autre droite qui coupe les hyperplans respectivement en b, b', b''. On considère la la projection affine p de E sur Δ parallèlement à $\vec{H}$. Par définition de p, on a les égalités : $p(a) = b$, $p(a') = b'$ et $p(a'') = b''$. On applique $\vec{p}$ à la relation $\overrightarrow{aa''} = \lambda.\overrightarrow{aa'}$ et, comme $\vec{p}$ est linéaire, on obtient $\vec{p}\,(\overrightarrow{aa''}) = \lambda.\vec{p}(\overrightarrow{aa'})$, ou encore, $\overrightarrow{bb''} = \lambda.\overrightarrow{bb'}$. □

4.2.2. ♠. Donnez une démonstration directe du théorème de Thalès, sans utiliser les applications affines. (Avec les notations de la démonstration précédente, on commencera par se ramener au cas où les points a et b sont égaux en utilisant pour cela une troisième droite. Dans le cas $a = b$ on utilisera la relation de Chasles et l'indépendance linéaire des vecteurs directeurs de D et Δ.)

Comparer les deux démonstrations (longueur, niveau des outils utilisés ...).

> *La méthode utilisée ci-dessus pour montrer Thalès repose sur l'utilisation d'une projection. Dans la pratique, avant de chercher à utiliser le théorème de Thalès, il est souvent plus astucieux de chercher la projection (ou d'autres applications affines, homothéties, translations, ... comme on le verra dans le paragraphe suivant) : cela peut simplifier considérablement la rédaction de la démonstation.*

4.3. La variante classique de Thalès.

> *Le résultat suivant est important. D'abord il redonne la forme de Thalès vue dans l'enseignement secondaire, mais aussi d'autres résultats : Desargues, Pappus,... Il montre pourquoi il peut être intéressant de considérer des applications affines (ici, des homothéties ou des translations) pour démontrer une propriété géométrique (ici le parallélisme). Il est indispensable de faire deux figures (une pour chaque cas) et de les mémoriser.*

Proposition. *Soient a, a', b et b' quatre points dans le plan affine tels que a et b (resp. a' et b') soient distincts. Les droites (ab) et $(a'b')$ sont parallèles si et seulement s'il existe une homothétie ou une translation u qui transforme a en a' et b en b'. De plus cet élément de $HT(E)$ est unique.*

En particulier, si les points a et a' (resp. b et b') sont distincts et les droites (aa') et (bb') distinctes, alors ou bien (aa') et (bb') sont strictement parallèles et u est la translation de vecteur $\overrightarrow{aa'}$ ou bien les droites (aa') et (bb') se coupent en c et u est l'homothétie de centre c et de rapport $\dfrac{\overrightarrow{ca'}}{\overrightarrow{ca}}$.

Démonstration. On sait déjà que s'il existe une homothétie ou une translation qui transforme a en a' et b en b', alors les droites (ab) et $(a'b')$ sont parallèles.

Réciproquement, si les droites (ab) et $(a'b')$ sont parallèles, considérons le rapport $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{a'b'}}{\overrightarrow{ab}}$. Si λ vaut 1, u est la translation de vecteur $\overrightarrow{aa'}$. Si λ est différent de 1, u est l'homothétie de rapport λ qui envoie a sur a'.

En particulier, si les points a et a' (resp. b et b') sont distincts et les droites (aa') et (bb') distinctes, on a deux cas : Si λ vaut 1, (aa') et (bb') sont distinctes et parallèles donc strictement parallèles. Sinon, (aa') et (bb') sont distinctes et passent par le centre de l'homothétie qui est donc leur point d'intersection c et le rapport λ vaut aussi $\dfrac{\overrightarrow{ca'}}{\overrightarrow{ca}}$. □

4.3.1. ♠. Vérifiez que la transformation convenable est unique.

4.3.2. ♠. Etablir l'analogue du résultat précédent dans un espace affine de dimension n quelconque.

4.4. **Forme du théorème de Thalès enseignée dans le secondaire.**

4.4.1. **Proposition.** *Soient D et D' deux droites distinctes du plan affine issues d'un point a. Soient b et c (resp. b' et c') des points de D (resp. D') distincts de a. On a l'équivalence :*

$$(bb') \parallel (cc') \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\overrightarrow{ac}}{\overrightarrow{ab}} = \frac{\overrightarrow{ac'}}{\overrightarrow{ab'}}$$

Si l'une des assertions équivalentes est vérifiée, on a :

$$\frac{\overrightarrow{ac}}{\overrightarrow{ab}} = \frac{\overrightarrow{ac'}}{\overrightarrow{ab'}} = \frac{\overrightarrow{cc'}}{\overrightarrow{bb'}}$$

4.4.2. ♠. Montrez la proposition. (Si les droites (bb') et (cc') sont parallèles, on pourra appliquer 4.2.1 ou employer 4.3. Pour la réciproque, on utilisera 4.3.)

4.5. **D'autres résultats géométriques : Desargues, Pappus.**

> *Les résultats suivants sont de grands classiques. Ils apparaissent parfois (sous une forme plus ou moins cachée) dans une épreuve de CAPES où il est demandé de les redémontrer.*
> *Pour prouver les théorèmes de Desargues et Pappus vous pouvez utiliser la proposition 4.3 ou le théorème de Thalès. Comparez l'efficacité des deux méthodes. Est-il besoin de redire qu'il faut faire des figures ?*

4.5.1. ♣. Soient D et D' deux droites de l'espace E. Soient a, b et c (resp. a', b' et c') trois points de D (resp. de D') tels que $\frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{bc}} = \frac{\overrightarrow{a'b'}}{\overrightarrow{b'c'}}$. Montrer que les droites (aa'), (bb') et (cc') sont parallèles à un même plan affine de E.

Enoncer le théorème obtenu dans le cas où l'on suppose de plus que (aa') et (bb') sont parallèles.

4.5.2. ♣. *Théorème de Desargues.* Soient deux triangles abc et $a'b'c'$ sans sommet commun. On suppose que (ab) (respectivement (bc), (ac)) est parallèle à $(a'b')$ (respectivement $(b'c')$, $(a'c')$). Montrer que les droites (aa'), (bb') et (cc') sont concourantes ou parallèles.

4.5.3. ♣. *Théorème de Pappus.* Soient D et D' deux droites distinctes du plan affine, a, b et c trois points de D et a', b' et c' trois points de D'. Montrer que si les droites (ab') et $(a'b)$ sont parallèles ainsi que les droites (cb') et $(c'b)$, alors les droites (ac') et $(a'c)$ le sont aussi.
Un autre théorème de Pappus est proposé en exercice à la fin de cette partie.

> *Comme vous l'avez constaté ci-dessus, pour montrer des résultats nouveaux il a fallu réinvestir les résultats anciens. Le même principe vaut à l'écrit du CAPES : Il faut toujours penser à réutiliser les questions précédentes.*
> *Quand les hypothèses sont symétriques, les conclusions doivent l'être aussi : cela permet de ne faire qu'un seul calcul, ou un seul raisonnement et d'obtenir immédiatement d'autres résultats "par symétrie".*

4.5.4. ♣. *Constructions géométriques de la somme et du produit.* (inspiré du CAPES interne de 1988)

Soient D et D' deux droites sécantes en un point o. Sur D, on suppose qu'il y a trois points a, b et m ($m \neq o$). On note x et y les rapports $\frac{\overrightarrow{oa}}{\overrightarrow{om}}$ et $\frac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{om}}$.

Donnez une construction à la règle et au compas des points c et d tels que $\frac{\overrightarrow{oc}}{\overrightarrow{om}} = x + y$ et $\frac{\overrightarrow{od}}{\overrightarrow{om}} = xy$. (On construira des parallélogrammes et on utilisera Thalès.)

La surprenante morale de cette histoire, c'est que, si les notions classiques de géométrie (droites, parallélisme) peuvent être facilement définies à l'aide d'algèbre (linéaire), réciproquement, les notions classiques d'algèbre (addition, multiplication) peuvent être retrouvées par des constructions purement géométriques ! Si ces questions vous intéressent vous pouvez consulter le livre d'Emil Artin, Algèbre géométrique, Gauthier-Villars, 1962.

5. Composition des applications affines, isomorphismes affines

5.1. **Proposition.** *La composée de deux applications affines est une application affine et l'application linéaire associée à la composée est la composée des applications linéaires associées.*

Démonstration. Soient f une application affine de E dans F et g une application affine de F dans G. Fixons un point a de E et calculons l'image d'un point quelconque x de E par $g \circ f$. On a $f(x) = f(a) + \vec{f}(\overrightarrow{ax})$, on applique g à cette égalité et on obtient :

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(a) + \vec{g}(\vec{f}(\overrightarrow{ax})).$$

L'application $g \circ f$ est donc affine et on a la formule : $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$. □

5.1.1. ♡. Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est affine, représentée par le couple (A, B) de $\mathcal{A}_{p,n}$, et si $f' : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est affine, représentée par le couple (A', B') de $\mathcal{A}_{m,p}$, la composée $f' \circ f$ est représentée par ... ?

5.1.2. ♣. Soit abc un triangle et m_0 un point du segment $[ab]$. La parallèle à (bc) issue de m_0 coupe (ac) en m_1, la parallèle à (ab) issue de m_1 coupe (bc) en m_2, la parallèle à (ac) issue de m_2 coupe (ab) en m_3 etc ?

Montrer que m_6 et m_0 sont confondus. Dans quel cas m_0 et m_3 sont-ils confondus ?
(Utilisez des projections considérées, au choix, comme applications du plan dans lui-même ou d'une droite sur une autre droite).

5.1.3. ♣. *Suite de 3.2.5.*

c. Déterminer les applications affines p qui vérifient $p \circ p = p$.

d. Déterminer les involutions affines.

5.1.4. ♣. *Composition dans $HT(E)$.* Soit $h(a, \lambda)$ l'homothétie de centre a et de rapport $\lambda \neq 1$. On définit géométriquement $h(a, \lambda)$ par la donnée de a, d'un point b et de son image $b' = h(a, \lambda)(b)$.

a. Construire l'image par $h(a, \lambda)$ d'un point m (à partir des données a, b et b' et m).

b. Montrer que $h(a, \lambda) \circ t_{\vec{v}}$ est une homothétie dont on précisera le rapport. Utiliser le théorème de Thalès pour donner une construction géométrique du centre de cette homothétie. Même question pour $t_{\vec{v}} \circ h(c, \lambda)$.

c. Remarquer que le produit de deux homothéties n'est pas toujours une homothétie. Construire les éléments caractéristiques d'un produit $h(a_1, \lambda_1) \circ h(a_2, \lambda_2)$ où les deux homothéties sont données géométriquement.

5.2. **Bijections affines.**

5.2.1. **Proposition.** *Une application affine f de E dans F est injective (resp. surjective, bijective) si et seulement si l'application vectorielle associée $\vec{f}$ est injective (resp. surjective, bijective). Si f est bijective, l'application f^{-1} est alors affine et on a $\overrightarrow{f^{-1}} = \vec{f}^{-1}$. On dit que f est un* **isomorphisme affine**.

Démonstration. Ce résultat est valable même en dimension infinie.
• *Injectivité :* Fixons un point a de E. Soit $\vec{v}$ un vecteur de $\operatorname{Ker}\vec{f}$. Si f est injective, les égalités $f(a+\vec{v}) = f(a)+\vec{f}(\vec{v}) = f(a)$ nous permettent d'affirmer que les points $a+\vec{v}$ et a coïncident donc $\vec{v} = \vec{0}$, de sorte que $\vec{f}$ est injective.

Réciproquement, si deux points x et y ont même image, le vecteur $\overrightarrow{f(x)f(y)}$ est nul, or $\overrightarrow{f(x)f(y)}$ vaut $\vec{f}(\overrightarrow{xy})$. Comme $\vec{f}$ est injective, le vecteur $\overrightarrow{xy}$ est nul et les points x et y sont confondus : f est donc injective.
•*Surjectivité :* Fixons un point a de E. Soit $\vec{w}$ un vecteur de $\vec{F}$. Si f est surjective, il existe un point x de E tel que $f(x) = f(a)+\vec{w}$. Mais on a aussi l'égalité :
$f(x) = f(a)+\vec{f}(\overrightarrow{ax})$ donc $\vec{w} = \vec{f}(\overrightarrow{ax})$ et $\vec{f}$ est surjective.

Réciproquement, Soit y un point de F. Posons $b = f(a)$. On a donc l'égalité $y = b+\overrightarrow{by}$. Comme $\vec{f}$ est surjective, il existe un vecteur $\vec{v}$ de $\vec{E}$ tel que $\vec{f}(\vec{v}) = \overrightarrow{by}$. Alors y est l'image du point $x = a+\vec{v}$ et f est surjective.
•*Bijectivité :* On déduit des équivalences précédentes que f est bijective si et seulement si $\vec{f}$ l'est.

Soit g l'application affine de F dans E qui envoie $b = f(a)$ sur a et dont l'application linéaire associée est $\vec{f}^{-1}$, on vérifie facilement que $g\circ f$ est l'identité de E, donc g est f^{-1} ce qui achève de prouver la proposition. □

5.2.2. ♡. Montrer que si E et F sont de même dimension finie, une application affine de E dans F est bijective si et seulement si elle est injective, ou encore si et seulement si elle est surjective.

5.3. **Bijections et repères.**

5.3.1. **Proposition.** *Si E et F ont même dimension, une application affine f de E dans F est un isomorphisme d'espaces d'affines si et seulement si elle envoie un (resp. tout) repère de E sur un repère de F*

Démonstration. Soit $(a_0,\cdots,a_n)$ un repère de E et $b_i = f(a_i)$. Alors $\overrightarrow{b_0b_i} = \vec{f}(\overrightarrow{a_0a_i})$. La suite $(\overrightarrow{a_0a_i})$ est une base de $\vec{E}$. Donc $\vec{f}$ est un isomorphisme si et seulement si $(\overrightarrow{b_0b_i})$ est une base de $\vec{F}$, i.e. si $(b_0,\cdots,b_n)$ est un repère de F. On conclut avec la proposition 5.2. □

5.3.2. **Proposition.** *Soient E et F deux espaces affines (de même dimension), munis respectivement de deux repères $(a_0,\cdots,a_n)$ et $(b_0,\cdots,b_n)$. Alors il existe un unique isomorphisme affine de E sur F envoyant a_i sur b_i.*

Démonstration. Il existe une unique application affine f de E sur F, envoyant a_i sur b_i (cf. 1.2) et c'est un isomorphisme en vertu de 5.3.1. □

5.3.3. ♠. Que dire du transformé d'une droite, d'un plan par une bijection affine ?

5.3.4. ♣. Soient (a,b,c) un repère d'un plan affine E et f l'application affine de E dans E définie par les égalités : $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$. Montrez que f est un isomorphisme et que son inverse est une puissance de f.

5.3.5. ♣. Soient D et Δ deux droites d'un plan affine sécantes en a et soit b un point de Δ distinct de a. On note σ_a et σ_b les symétries de centre a et b, σ_D la symétrie $\sigma_{D,\vec{\Delta}}$ et σ_Δ la symétrie $\sigma_{\Delta,\vec{D}}$.

a. Déterminez toutes les applications composées $\sigma_a\circ\sigma_D$, $\sigma_D\circ\sigma_a$ et $\sigma_D\circ\sigma_\Delta$.

A suivre en 6.2.1

5.4. **Les espaces affines de dimension n sont isomorphes.**

Corollaire. *Tout espace affine de dimension n est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.*

> *Par exemple, tous les plans affines sont isomorphes à $\mathbb{R}^2$, donc isomorphes entre eux. C'est pourquoi on s'autorise parfois à parler* **du** *plan affine ; même remarque pour* **l'***espace affine.*

6. Groupe affine

On suppose dans ce paragraphe que E et F coïncident.

6.1. **Définition et proposition.** *Une application affine bijective $f : E \longrightarrow E$ s'appelle un* **automorphisme affine** *de E. Les automorphismes affines forment un groupe pour la composition des applications qu'on appelle le* **groupe affine** *de E et qu'on note $GA(E)$.*

Démonstration. Cela résulte du paragraphe précédent. □

6.2. **Proposition.** *L'application Θ de $GA(E)$ dans $GL(\vec{E})$ qui à une application affine f associe l'application linéaire associée $\vec{f}$ est un homomorphisme de groupes de $GA(E)$ dans $GL(\vec{E})$. Cet homomorphisme est surjectif et son noyau est le groupe $T(E)$ des translations de E.*

Démonstration. L'application Θ est un homomorphisme de groupes car l'application linéaire associée à la composée est la composée des applications linéaires associées :

$$\Theta(g \circ f) = \Theta(g) \circ \Theta(f).$$

La surjectivité résulte de 1.2 : soient φ un automorphisme linéaire et c un point de E, l'application f qui fixe c et dont l'application linéaire associée est φ vérifie :

$$\Theta(f) = \varphi.$$

Il reste donc à calculer le noyau de Θ, c'est-à-dire l'image réciproque de l'élément neutre de $GL(\vec{E})$ qui est l'identité de $\vec{E}$. On cherche donc les applications affines dont l'application linéaire associée est l'identité. Le groupe des translations $T(E)$ est contenu dans le noyau de Θ. Réciproquement, on va montrer que tout élément du noyau est une translation. Si f est un automorphisme affine tel que $\vec{f}$ soit l'identité, on a, pour tout point x de E :

$$f(x) = f(a) + \overrightarrow{ax} = f(a) + \overrightarrow{af(a)} + \overrightarrow{f(a)x} = x + \overrightarrow{af(a)}$$

de sorte que f n'est autre que la translation de vecteur $\overrightarrow{af(a)}$. □

6.2.1. ♣. *Suite de 5.3.5.*

b. Calculer $\sigma_a \circ \sigma_b$. *A suivre en 7.5.3*

6.2.2. ♣. Déterminer le sous-groupe de $GA(E)$ engendré par les symétries centrales.

6.2.3. ♣. *Les milieux des lignes polygonales.* Soit n un entier supérieur ou égal à 3 et $a_1, \dots, a_n$ dans E. Le problème est de trouver une ligne polygonale fermée dont les a_i soient les milieux des côtés, i.e., des points $x_1, \dots, x_n$ tels que, pour tout i, a_i soit le milieu de $x_i x_{i+1}$ (on convient que $x_{n+1} = x_1$).

a. On suppose n impair. Montrer que le problème a une solution unique (utiliser les symétries σ_{a_i}). Indiquer une construction des points x_i et la réaliser pour $n = 3$ et $n = 5$.

b. On suppose n pair, $n = 2p$. Montrer que le problème n'a pas de solution, sauf si on a la relation vectorielle

$$\sum_{i=1}^{p} \overrightarrow{a_{2i}a_{2i-1}} = \overrightarrow{0}, \qquad (*)$$

auquel cas, pour tout point de départ x_1 de E on a une solution $x_1, \dots, x_n$ et une seule.

Que signifie la condition $(*)$ pour $n = 4$?

On se donne cinq points a_i, $(i = 1, \cdots, 5)$. Construire un sixième point a_6 tel que le problème ait une solution.

6.2.4. ♡. On note $\mathcal{GA}_n$ l'ensemble des couples (A, B) où A est une matrice carrée de taille n inversible et B est une quelconque matrice colonne de hauteur n. On munit $\mathcal{GA}_n$ de la loi de composition interne $(A', B').(A, B) = (A'.A, A'.B + B')$. Vérifiez que $(\mathcal{GA}_n, .)$ est un groupe naturellement isomorphe à $(GA(\mathbb{R}^n), \circ)$. Explicitez $(\mathcal{GA}_1, .)$

6.3. **Corollaire.** *$T(E)$ est un sous-groupe distingué de $GA(E)$.*

Démonstration. C'est le noyau d'un homomorphisme de groupes. □

Cela signifie simplement que, si t est une translation et g un automorphisme affine, $g \circ t \circ g^{-1}$ est une translation. On peut même préciser laquelle : si t est la translation de vecteur $\vec{v}$, sa conjuguée $g \circ t \circ g^{-1}$ est la translation de vecteur $\vec{g}(\vec{v})$. En effet, on a, pour tout x de E :

$$g \circ t \circ g^{-1}(x) = g \circ t(g^{-1}(x)) = g(g^{-1}(x) + \vec{v}) = x + \vec{g}(\vec{v}) = t_{\vec{g}(\vec{v})}(x).$$

Cette propriété sera généralisée en IV. 6.5.

6.4. **Le sous-groupe $HT(E)$.** Le théorème suivant complète de IV.3.1.4.

6.4.1. **Théorème.** *L'ensemble $HT(E)$ des homothéties de rapport non nul et des translations de E est un sous-groupe distingué de $GA(E)$. Il est formé des $f \in GA(E)$ tels que $\vec{f}$ est une homothétie vectorielle de rapport non nul, ou encore tels que pour toute droite D de E, $f(D)$ est parallèle à D.*

Démonstration. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des homothéties vectorielles de rapport non nul. On a vu en 2.3 que $HT(E)$ est formé des éléments f de $GA(E)$ tels que $\Theta(f)$ soit dans $\mathcal{H}$, autrement dit $HT(E) = \Theta^{-1}(\mathcal{H})$. Mais $\mathcal{H}$ est un sous-groupe distingué de $GL(\vec{E})$ (c'est son centre) et Θ est un morphisme de groupes d'après la proposition 6.2 : donc $HT(E)$ est bien un sous-groupe distingué de $GA(E)$.

Nous avons déjà vu en 3.1.4 que les homothéties et les translations envoient une droite sur une parallèle. Supposons réciproquement qu'un élément f de $GA(E)$, envoie toute droite sur une droite parallèle. D'après la proposition 3.1.1 cela veut dire que pour toute droite D de E, la droite vectorielle $\vec{D}$ est invariante par $\vec{f}$. Il en résulte que tout vecteur non nul de $\vec{E}$ est un vecteur propre de $\vec{f}$. Or c'est un résultat classique d'algèbre linéaire que les seuls endomorphismes de $\vec{E}$ dont tous les vecteurs non nuls sont propres sont les homothéties vectorielles. Finalement $\vec{f}$ appartient à $\mathcal{H}$, donc f est une homothétie ou une translation. □

6.4.2. ♣. Soit E un espace affine de dimension 3 et f un élément de $GA(E)$ telle que pour tout plan P, $f(P)$ soit parallèle à P. Montrer que f est une homothétie ou une translation.

6.5. **Principe de conjugaison.**

6.5.1. **Définition.** *Soient f une application affine de E dans E, et g un automorphisme affine de E. La conjuguée de f par g est l'application affine $g \circ f \circ g^{-1}$.*

6.5.2. ♡. Montrez que l'application $\varphi_g : GA(E) \longrightarrow GA(E)$ définie par $\varphi_g(f) = g \circ f \circ g^{-1}$ est un automorphisme de groupes. (Cela signifie en particulier qu'on a

$$g \circ (f_1 \circ f_2) \circ g^{-1} = (g \circ f_1 \circ g^{-1}) \circ (g \circ f_2 \circ g^{-1}).)$$

L'application qui à g associe φ_g est un homomorphisme de groupes. Lesquels ? En particulier, on a $(\varphi_g)^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$.

> *Le principe de conjugaison est une remarque très simple, mais essentielle dans de nombreuses questions. Il s'énonce comme suit :*

6.5.3. **Principe de conjugaison.** *Soient f et g des applications affines de E dans E, g étant un isomorphisme. Alors :*

- **(i)** *le conjugué $g \circ f \circ g^{-1}$ est une application affine de même nature géométrique que f,*
- **(ii)** *les éléments caractéristiques de $g \circ f \circ g^{-1}$ s'obtiennent à partir de ceux de f en les "transportant par g".*

> *Cette formulation est évidemment un peu vague (c'est pourquoi nous parlons d'un principe et non d'un théorème) mais elle permet, dans toutes les situations particulières de trouver un énoncé précis qu'il reste alors à* **démontrer** *dans chaque cas. Ce principe est d'ailleurs valable dans beaucoup d'autres contextes (par exemple dans le cas des groupes de permutations). En voici quelques illustrations :*

6.5.4. ♠. Si le point c est fixe par f, trouvez un point fixe de $g \circ f \circ g^{-1}$.

6.5.5. ♠. Si f est un automorphisme, alors $g \circ f \circ g^{-1}$ en est un aussi.

6.5.6. On a vu en 6.3 que si f est une translation (de vecteur $\vec{u}$), alors $g \circ f \circ g^{-1}$ est une translation (de vecteur $\vec{g}(\vec{u})$).

6.5.7. ♠. De même pour le conjugué d'une homothétie : Si f est l'homothétie de centre c et de rapport λ, montrez que $g \circ f \circ g^{-1}$ est l'homothétie de rapport λ (même nature) et de centre $g(c)$ (transporté par g).

> *L'exercice suivant vous permettra de tester si vous avez bien saisi le principe. Vous pouvez aussi essayer d'appliquer le principe dans le cas des isométries, des permutations, ...*

6.5.8. ♣. Soient f et g des éléments de $GA(E)$. Calculez $g \circ f \circ g^{-1}$ dans les cas suivants :

- **(i)** f est la symétrie par rapport au sous-espace affine V, de direction $\overrightarrow{W}$, avec, comme toujours, $\vec{V} \oplus \overrightarrow{W} = \vec{E}$. Étudiez en particulier le cas de la symétrie centrale.
- **(ii)** f est la projection sur le sous-espace affine V parallèlement à $\overrightarrow{W}$.

6.5.9. ♠. Déterminez le centre[8] du groupe $GA(E)$.

L'exercice suivant est un des ingrédients d'une preuve du principe de conjugaison.

6.5.10. ♠. Si V est un sous-espace affine invariant (resp. fixe point par point) par f, montrez que $g(V)$ est un sous-espace affine invariant (resp. fixe point par point) par $g \circ f \circ g^{-1}$. Plus généralement, si on a la relation : $f(V) \parallel V$, alors on a la relation : $g \circ f \circ g^{-1}(V') \parallel V'$ où on a noté V' le sous-espace $g(V)$.

7. Points fixes d'une application affine, théorème de décomposition

Dans tout ce paragraphe on considère des applications affines de E dans lui-même.

[8] On appelle "centre d'un groupe" G le sous-groupe $Z(G)$ des éléments de G qui commutent à tout g dans G.

7.1. **Applications affines laissant fixe un point.**

7.1.1. **Définition et proposition.**
Soit c un point de E et posons :

$$GA_c(E) = \{f \in GA(E) \mid f(c) = c\}.$$

$GA_c(E)$ est un sous-groupe de $GA(E)$. La restriction de Θ à $GA_c(E)$ induit un isomorphisme de ce groupe sur le groupe linéaire $GL(\vec{E})$.

Démonstration. En effet, comme la seule translation qui fixe c est l'identité, la restriction de Θ est injective. Elle est aussi surjective car, φ étant donnée, l'application affine f dont φ est l'application linéaire associée et qui fixe c vérifie $\Theta(f) = \varphi$. □

> *Cette proposition est importante : elle dit qu'une application affine qui possède un point fixe est essentiellement une application linéaire. C'est pourquoi on cherche toujours d'abord si une application affine possède un point fixe et dans ce cas on la comprend comme une application linéaire et on peut lui appliquer les techniques bien connues d'étude (réduction à la forme diagonale et autres). C'est d'ailleurs essentiellement ce qu'on a fait dans le cas des homothéties, des symétries, etc.*
>
> *Lorsque $E = F$, les seules applications nouvelles par rapport au vectoriel sont donc les applications affines sans point fixe, et notamment les translations (mais pas seulement, voir en 7.5 les symétries glissées par exemple).*
>
> *En fait, on peut reconstruire toute application affine à partir des translations et des applications affines fixant un point donné (donc "linéaires") :*

7.1.2. ♠. Soit f une application affine de E dans E et soit a un point de E. Montrez que f s'écrit sous la forme $f = t \circ g$ où t est une translation et où g admet le point a comme point fixe. De plus cette écriture est unique.

7.1.3. *Remarques.* Cette écriture présente plusieurs inconvénients :

- **(i)** Quand on passe du point a à un point a', l'écriture change (en général).
- **(ii)** t et g ne commutent pas en général (ce qui rend délicat le calcul d'une composée $f \circ f'$).

La décomposition canonique du théorème de décomposition 7.4 (quand elle existe) ne présente pas ces inconvénients.

7.1.4. ♠. On a vu en 6.5.4 que si c est un point fixe de f et si g appartient à $GA(E)$, $g(c)$ est un point fixe de $g \circ f \circ g^{-1}$. On a donc $g \circ GA_c(E) \circ g^{-1} = GA_{g(c)}(E)$, de sorte que les sous-groupes $GA_c(E)$ ne sont pas distingués (en dimension $n \geq 1$).

7.1.5. ♣. Soit G un sous-groupe de $GA(E)$.

- **a.** On suppose que G préserve un ensemble fini F de points de E (i.e. $\forall g \in G, \forall x \in F, g(x) \in F$).
  - **(i)** Montrer que tous les éléments de G fixent l'isobarycentre de F.
  - **(ii)** Montrer que si $\mathrm{Aff}(F) = E$, alors G est fini de cardinal divisant $n!$, où n est le cardinal de F (on pourra considérer le morphisme de G dans le groupe des permutations de F obtenu par restriction à F des éléments de G).
  - **(iii)** Déterminer le sous-groupe de $GA(E)$ préservant un ensemble de trois points non alignés (on pourra utiliser 2.7.3).
- **b.** On suppose que G est fini. Montrer qu'il existe un point c fixé par tous les éléments de G (on pourra essayer de construire une partie finie F invariante par G).

7.2. **Points fixes d'une application affine.**

7.2.1. **Proposition.** *Soit f une application affine de E dans E. L'ensemble des points fixes de f est vide ou bien est le sous-espace affine passant par un point fixe et de direction* $\mathrm{Ker}\,(\vec{f}-\mathrm{Id}_{\vec{E}})$.

Remarquons d'abord que $\mathrm{Ker}\,(\vec{f}-\mathrm{Id}_{\vec{E}})$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs fixes par $\vec{f}$. C'est donc le sous-espace propre de $\vec{f}$ associé à la valeur propre 1 si 1 est valeur propre de $\vec{f}$ et il est réduit au vecteur nul sinon.

Démonstration. S'il existe un point c de E fixe par f, montrons que l'ensemble X des points fixes de f est égal à $A = c + \mathrm{Ker}\,(\vec{f}-\mathrm{Id}_{\vec{E}})$.

Soit a un point de A, alors on a l'égalité $f(a) = c + \vec{f}(\overrightarrow{ca})$, or, puisque les points c et a sont dans A, le vecteur $\overrightarrow{ca}$ appartient à la direction de A, soit $\mathrm{Ker}\,(\vec{f}-\mathrm{Id}_{\vec{E}})$, donc le vecteur $\overrightarrow{ca}$ est fixe par $\vec{f}$ et $f(a)$ vaut a, c'est-à-dire que le point a appartient à X.

Soit b un point de X, on a l'égalité $\vec{f}(\overrightarrow{cb}) = \overrightarrow{f(c)f(b)} = \overrightarrow{cb}$ donc le vecteur $\overrightarrow{cb}$ est dans $\mathrm{Ker}\,(\vec{f}-\mathrm{Id}_{\vec{E}})$ et le point $b = c + \overrightarrow{cb}$ appartient à A. □

7.2.2. ♠. Quels sont les points fixes d'une symétrie affine, d'une projection affine ?

7.2.3. **Théorème.** *(très important). Soit f une application affine de E dans E (de dimension finie toujours) et soit $\vec{f}$ l'application linéaire associée à f. Alors, l'application f admet un unique point fixe si et seulement si* 1 *n'est pas valeur propre de $\vec{f}$.*

Démonstration. Si f admet un unique point fixe, d'après 7.2, l'ensemble de ses points fixes est un sous-espace affine de direction $\{\vec{0}\} = \mathrm{Ker}\,(\vec{f}-\mathrm{Id}_{\vec{E}})$, donc 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$.

Réciproquement, si 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$, nous avons à démontrer un résultat d'existence et d'unicité.
Existence : Fixons un point a de E et cherchons à déterminer un point fixe c. Les équivalences suivantes vont guider notre recherche mais ne présument en aucun cas de l'existence de c.

$$f(c) = c \quad \Leftrightarrow \quad f(a) + \vec{f}(\overrightarrow{ac}) = a + \overrightarrow{ac} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{f(a)a} = (\vec{f}-\mathrm{Id}_{\vec{E}})(\overrightarrow{ac})$$

Maintenant reprenons la démonstration. Comme E est de dimension finie et que $\vec{f}-\mathrm{Id}_{\vec{E}}$ est injective, $\vec{f}-\mathrm{Id}_{\vec{E}}$ est surjective, le vecteur $\overrightarrow{f(a)a}$ a donc un antécédent $\vec{v}$ par $\vec{f}-\mathrm{Id}_{\vec{E}}$. Posons $c = a + \vec{v}$. Il vous reste à vérifier que ce point c défini à partir du point a est un point fixe.

L'existence résulte donc de la surjectivité de l'application $\vec{f}-\mathrm{Id}_{\vec{E}}$. L'unicité du point fixe résultera de son injectivité.
Unicité : Puisque f admet un point fixe, l'ensemble de ses points fixes est un sous-espace affine de direction $\mathrm{Ker}\,(\vec{f}-\mathrm{Id}_{\vec{E}}) = \{\vec{0}\}$ (injectivité), donc est réduit à un point. □

7.3. Condition de commutation.

7.3.1. **Proposition.** *Soient g une application affine de E dans E et $\vec{v}$ un vecteur de $\vec{E}$. Les applications g et $t_{\vec{v}}$ commutent si et seulement si $\vec{v}$ appartient à* $\mathrm{Ker}\,(\vec{g}-\mathrm{Id}_{\vec{E}})$.

Démonstration. Les applications g et $t_{\vec{v}}$ commutent si et seulement si on a :

$$\forall m \in E \quad (g \circ t_{\vec{v}})(m) = (t_{\vec{v}} \circ g)(m).$$

Ceci est équivalent à :

$$\forall m \in E \quad g(m) + \vec{g}(\vec{v}) = g(m) + \vec{v}.$$

Autrement dit la condition nécessaire et suffisante de commutation est : le vecteur $\vec{v}$ est propre pour la valeur propre 1 de g ou bien c'est le vecteur nul. □

7.3.2. ♠. Si g a un unique point fixe, quelles sont les translations qui commutent à g ?

7.3.3. ♣. Quel est le centre[9] de $HT(E)$?

[9]Voir 6.5.9.

7.4. **Décomposition canonique.**

7.4.1. **Théorème.** *Si une application affine f de E dans E vérifie :*

$$(*) \qquad \vec{E} = \mathrm{Ker}\,(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}}) \oplus \mathrm{Im}\,(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}}).$$

alors f s'écrit de manière unique $t_{\vec{v}} \circ g$ où

- **(i)** *le vecteur $\vec{v}$ appartient à* $\mathrm{Ker}\,(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}})$,
- **(ii)** *g est une application affine admettant un point fixe,*
- **(iii)** *g et $t_{\vec{v}}$ commutent.*

On admettra ce théorème.

7.4.2. ♠. Si f vérifie $(*)$ et a un point fixe, $f = f \circ t_{\vec{0}}$ est donc sa décomposition canonique.

7.4.3. *Remarque.* L'hypothèse de décomposition en somme directe peut paraître arbitraire. On peut déjà noter que les dimensions des sous-espaces sont convenables pour avoir une telle écriture et on vérifie qu'elle est satisfaite, en particulier, par toutes les isométries affines.

7.4.4. ♡. De plus, montrez que si $\vec{f}$ est diagonalisable, alors l'hypothèse est satisfaite.

7.5. **Symétries glissées.** Soit $f \in GA(E)$ et supposons que $\vec{f}$ soit une symétrie vectorielle $\vec{\sigma}$. Les éventuelles valeurs propres de $\vec{\sigma}$ sont 1 et -1 et elle est diagonalisable avec des sous-espaces propres que nous noterons respectivement $\vec{F}$ (éventuellement réduit à $\{\vec{0}\}$) et $\vec{G}$. L'application $\vec{\sigma}$ vérifie donc les hypothèses du théorème de décomposition. Il y a trois cas possibles pour f selon le nombre de points fixes de f :

- **(i)** Si $\vec{F}$ est réduit à $\{\vec{0}\}$, f a un unique point fixe c, c'est la symétrie affine de centre c.
- **(ii)** Si $\vec{F}$ n'est pas réduit au vecteur nul et que f ait des points fixes, alors f admet un sous-espace affine de points fixes F de direction $\vec{F}$ et f est la symétrie affine (oblique) d'axe F et de direction $\vec{G}$.
- **(iii)** Si $\vec{F}$ n'est pas réduit au vecteur nul et que f n'ait pas de point fixe, f se décompose comme $g \circ t_{\vec{v}}$ où g admet un point fixe c. L'application g est donc une symétrie $\sigma_{F,\vec{G}}$ avec $F = c + \vec{F}$ et $t_{\vec{v}}$ est une translation de vecteur $\vec{v}$, vecteur non nul de $\vec{F}$. On dit que f est **une symétrie glissée**.

7.5.1. ♠. Soit $f = \sigma \circ t_{\vec{u}}$ une symétrie ou une symétrie glissée. Calculez le carré de f. Montrez que l'axe de σ est l'ensemble des milieux des segments $[mf(m)]$ pour $m \in E$.

7.5.2. ♠. Soit f une application affine d'application linéaire associée $\sigma_{F,\vec{G}}$. Déduire de 7.5.1 des méthodes pour écrire la décomposition canonique de f.

7.5.3. ♣. *Suite de 6.2.1.*

c. Déterminer les applications $\sigma_D \circ \sigma_b$ et $\sigma_b \circ \sigma_D$.

7.6. **Théorème de Ménélaüs.**

7.6.1. ♣. Soient $a, b, c \in E$ et h_a, h_b, h_c trois homothéties non triviales de centres a, b, c. On suppose $h_a \circ h_b \circ h_c = \mathrm{Id}_E$. Montrer que les points a, b et c sont alignés.

7.6.2. ♣. *Théorème de Ménélaüs.* On suppose que E est un plan affine. Soient a,b,c trois points non alignés de E et soient a',b',c' trois points, distincts de a,b,c, situés respectivement sur les droites bc,ca,ab. Montrer que a',b',c' sont alignés si et seulement si l'on a :

$$\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \times \frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} \times \frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} = 1$$

(Utilisez 7.6.1).

Applications du théorème de Ménélaüs

7.6.3. ♣. *Théorème de Pappus.* Dans le plan affine on considère deux droites D et D' concourantes en o et sur D (resp. D') trois points a,b,c (resp. a',b',c') distincts et distincts de o. Soit u (resp. v, resp. w) le point d'intersection des droites (bc') et $(b'c)$ (resp. (ac') et $(a'c)$, resp. (ab') et $(a'b)$).

Montrer que u,v,w sont alignés. (On considérera les points d'intersection α,β,γ des droites $(ab'),(a'c)$; $(bc'),(b'a)$; $(ca'),(c'b)$ et on appliquera cinq fois dans un sens et une fois dans l'autre (!) le théorème de Ménélaüs au triangle α,β,γ).

7.6.4. ♣. Soient (a,b,c) un repère du plan affine E et a',b',c' des points, distincts de a,b,c, et situés respectivement sur $(bc),(ca),(ab)$. Soient a'',b'',c'' les symétriques de a',b',c' par rapport aux milieux de $[bc],[ca],[ab]$. Montrer que a'',b'',c'' sont alignés si et seulement si a',b',c' le sont.

CORRIGES ET INDICATIONS

Corrigés : ESPACES AFFINES

1. ESPACE AFFINE

1.3. La fonction s de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$ qui à $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ associe $x_0 + x_1 + \cdots + x_n$ est une forme linéaire. Donc son noyau $\vec{E}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$, et en tant que tel un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Vérifions que la fonction Φ de $E_n \times E_n$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ qui au couple de points $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ et $(x'_0, x'_1, \cdots, x'_n)$ associe $(x'_0 - x_0, x'_1 - x_1, \cdots, x'_n - x_n)$ munit E_n d'une structure d'espace affine d'espace vectoriel sous-jacent $\vec{E}_n$.

D'abord $\Phi(E_n \times E_n)$ est contenu dans $\vec{E}_n$, car

$$s(x'_0 - x_0, x'_1 - x_1, \cdots, x'_n - x_n) = s(x'_0, x'_1, \cdots, x'_n) - s(x_0, x_1, \cdots, x_n) = 1 - 1 = 0.$$

Reste à vérifier les axiomes 1) et 2) de la définition 1.1 .

Soient $p = (p_0, p_1, \cdots, p_n), q = (q_0, q_1, \cdots, q_n), r = (r_0, r_1, \cdots, r_n)$ trois points de E_n. Comme $r_i - p_i = (q_i - p_i) + (r_i - q_i)$ on a bien la relation de Chasles $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}$.

Fixons $a = (a_0, a_1, \cdots, a_n)$ dans E_n et montrons pour conclure la bijectivité de $p \mapsto \overrightarrow{ap}$ de E_n sur $\vec{E}_n$: soit $\vec{u} = (u_0, u_1, \cdots, u_n)$ un vecteur quelconque de $\vec{E}_n$, nous devons déterminer le nombre de solutions de l'équation $\overrightarrow{ap} = \vec{u}$ (l'inconnue étant le point $p = (p_0, p_1, \cdots, p_n)$ de E_n). Nous devons résoudre les $n+1$ équations $p_i - a_i = u_i$ aux inconnues (p_i). Il est clair qu'il y a toujours une et une seule solution (donnée par $p_i = u_i + a_i$). Ceci achève la vérification de l'axiome 2).

1.4.1. *Bien que ces propriétés semblent naturelles, comme elles ne sont pas dans les axiomes de définition, elles doivent en être déduites.*

Ecrivons la relation de Chasles pour $x = y = z$, on obtient :

$$\forall x \in E \quad \overrightarrow{xx} + \overrightarrow{xx} = \overrightarrow{xx}$$

donc pour tout x de E, le vecteur $\overrightarrow{xx}$ est le vecteur nul.

Ecrivons la relation de Chasles pour les points (x, y, x) de E^3 :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yx} = \overrightarrow{xx} = \vec{0}$$

donc pour tous x et y de E, le vecteur $\overrightarrow{yx}$ est le vecteur $-\overrightarrow{xy}$.

1.5.1. La relation de Chasles est vérifiée, en effet, pour trois vecteurs quelconques u, v et w de $\vec{E}$, on a :

$$\overrightarrow{uv} + \overrightarrow{vw} = (v - u) + (w - v) = w - u = \overrightarrow{uw}$$

Pour tout u de $\vec{E}$, l'application Φ_u définie de $\vec{E}$ (vu comme espace affine) dans $\vec{E}$ (vu comme espace vectoriel sous-jacent) par $\Phi_u(v) = v - u$ est une bijection de $\vec{E}$ dans $\vec{E}$. La bijection réciproque est Φ_{-u}. L'application Φ_0 est l'identité.

1.5.2. $\Phi((2, -1, 0), (1, 1, -1)) = (-1, 2, -1)$.

2. TRANSLATIONS

2.1.1. Le point $a + \vec{v}$ est le point $(a_1 + v_1, a_2 + v_2)$

2.1.4. En utilisant la définition de la somme de a et $\vec{v}$ et la relation de Chasles , on peut écrire :

$$b = a + \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{ab} = \vec{v} \quad \Leftrightarrow \forall c \in E \quad \overrightarrow{ca} + \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ca} + \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \forall c \in E \quad \overrightarrow{cb} = \overrightarrow{ca} + \vec{v}.$$

2.3.1. L'élément neutre de $T(E)$ est $T(\vec{0})$, c'est-à-dire la translation de vecteur nul, soit l'identité. L'inverse de $t_{\vec{v}} = T(\vec{v})$ est $T(-\vec{v})$, soit la translation de vecteur $-\vec{v}$.

3.4.1. Les sous-espaces affines de dimension 0 sont les points.

3.4.2. Voir 3.3.1.

3.4.4. Soit a un point de V, par hypothèse, le point a est aussi dans W. Le sous-espace vectoriel $\vec{V} = \{\overrightarrow{ax}, x \in V\}$ est contenu dans $\vec{W} = \{\overrightarrow{ax}, x \in W\}$ puisque V est contenu dans W. Mais alors les sous-espaces vectoriels $\vec{V}$ et $\vec{W}$ coïncident si et seulement si leurs dimensions sont égales et il en est donc de même pour les sous-espaces affines $V = a + \overrightarrow{V}$ et $W = a + \overrightarrow{W}$.

On en déduit que les sous-espaces affines d'une droite sont les points (dimension 0) et la droite elle-même (dimension 1). Les sous-espaces affines d'un plan affine sont les points, les droites et le plan lui-même.

3.5.2. Soit V un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$. D'après 1.5, on peut écrire :

$$\Phi_0(V) = \{v, v \in V\} = V$$

L'ensemble $\Phi_0(V)$ est un sous-espace vectoriel, donc, comme 0 appartient à V, on a montré que V est un sous-espace affine passant par 0 de direction V.

4. INTERSECTION DE SOUS-ESPACES AFFINES, SOUS-ESPACE AFFINE ENGENDRÉ

4.1.2. Si l'intersection des sous-espaces affines A et B n'est pas vide et est réduite à un point, sa direction $\vec{A} \cap \vec{B}$ doit être $\vec{0}$, les sous-espaces vectoriels $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont donc en somme directe.

La condition n'est pas suffisante car elle est vérifiée par une droite affine et un point qui n'appartient pas à cette droite mais l'intersection des deux est vide, cf. aussi 4.1.5.

4.1.3. Comme les deux plans P_1 et P_2 ne sont pas disjoints, leur intersection est un sous-espace affine V de dimension au plus 1 car ils sont distincts (3.4.4), c'est donc un point ou une droite. Si c'était un point, par 4.1.2, $\vec{P_1}$ et $\vec{P_2}$ seraient en somme directe, le sous-espace $\vec{P_1} \oplus \vec{P_2}$ serait alors de dimension 4, ce qui est absurde, donc V est une droite.

4.2.3.

- **(i)** Comme A n'est pas réduit à un point, la dimension de Aff$A$ est au moins 1, or la droite $D = a + \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{ab}\}$ contient A donc c'est Aff$A$, le plus petit sous-espace affine contenant A puisque sa dimension est minimale.
- **(ii)** Comme A n'est pas réduit à un point, la dimension de Aff$A$ est au moins 1. La droite D qui contient les trois points (alignés) est donc le sous-espace affine engendré par ces trois points.
- **(iii)** Comme les trois points ne sont pas alignés, Aff$A$ est au moins de dimension 2, le sous-espace affine $P = a + \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}\}$ contient les trois points et est au plus de dimension 2, c'est donc le plan engendré par a, b et c.

4.3.2. $\mathrm{Aff}(\{a,b\}) = a + \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{am}, m \in \{a,b\}\} = a + \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{ab}\}$.

5. PARALLÉLISME

5.3.1.

- **(i)** Soit $\vec{D}$ la direction de la droite donnée D, la droite passant par a et parallèle à D est la droite $a + \vec{D}$. Le résultat est vrai en toute dimension.
- **(ii)** Si D_1 et D_2 sont parallèles à Δ, on a, par définition :

$$\vec{D}_1 = \vec{\Delta} \quad \text{et} \quad \vec{D}_2 = \vec{\Delta} \quad \Rightarrow \vec{D}_1 = \vec{D}_2$$

  donc D_1 et D_2 sont parallèles.
- **(iii)** Si D_1 et D_2 ont en commun un point a, leur intersection est le sous-espace affine $a + (\vec{D}_1 \cap \vec{D}_2) = a + \vec{D}_1 = a + \vec{D}_2$ puisqu'elles ont même direction.
  Elles sont donc confondues.

(iv) Si deux droites d'un plan n'ont pas même direction, leurs directions sont en somme directe et comme les droites sont coplanaires, les directions sont supplémentaires. Alors, d'après 4.1.5, leur intersection est exactement un point.
L'énoncé **(iv)** à démontrer est la contraposée de ce résultat qui n'est pas vrai pour des droites non coplanaires (voir 5.1.1).

5.3.3. Démontrez que la direction d'une droite affine est la droite vectorielle engendrée par l'un de ses vecteurs directeurs. Concluez.

Corrigés : BARYCENTRES

1. Définition et propriétés

1.4.8. Appliquez 1.3 (iv) avec $b = (0,0)$ comme origine.

1.4.10. Le barycentre de i, j, k se calcule dans $\mathbb{R}^3$ et on trouve $m = (a,b,c)$ d'après 1.4.8. C'est un point de E.

1.5.1. Utilisez 1.4.6.

1.5.2. Précisez pour quelles valeurs de α on a $m = a$ et $m = b$.

1.6.1. Utilisez respectivement 1.3 iv) et i).

1.6.2. Utilisez 1.4.8.

2. Barycentres et sous-espaces affines

2.2.1. Le sous-espace engendré par i, j, k n'est autre que E.

2.2.2. Montrez que X est contenu dans Aff$A$ en utilisant la stabilité par barycentration. Montrez ensuite, en utilisant le théorème de double associativité, que X est un sous-espace affine contenant A. Concluez.

3. Repères affines et coordonnées

3.3.2. Il suffit de prendre, dans un plan, quatre points a_0, a_1, a_2, a_3 tels que a_1, a_2, a_3 soient alignés sur une droite D et que a_0 ne soit pas sur D.

3.5.1. Pour la première assertion il suffit d'extraire de $\overrightarrow{a_0a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_0a_k}$ une base de Vect $(\overrightarrow{a_0a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_0a_k})$. Pour la seconde, il suffit d'écrire $V = a + \overrightarrow{V}$ et de se souvenir que l'espace $\overrightarrow{V}$ est de dimension finie, donc a une base finie.

4. Compléments sous forme d'exercices

4.4.1. Vous avez fait le dessin ? Alors, vous êtes sans doute convaincu(e). Si on remplace $[am[$ par $[am]$ on passe du demi-plan fermé au demi-plan ouvert.

Corrigés : APPLICATIONS AFFINES

2. Applications affines : Exemples

2.4.3. Utilisez 1.2.

2.5.2. V est un point et $\vec{W} = \vec{E}$.

2.6.5. Forme linéaire.

2.7.2. C'est l'identité.

2.7.3. *Application* : Si par exemple $f(a)$ est le point a, alors f est la symétrie affine par rapport à la médiane de abc issue de a, dans la direction de la droite (bc).

3.1.3. Discutez suivant que $\vec{D}$ est contenu dans $\mathrm{Ker}\,\vec{f}$ ou pas.

3.1.6. Les droites passant par le centre pour une homothétie de rapport différent de 1, les droites dont la direction vectorielle contient $\vec{v}$ pour les translations de vecteur $\vec{v} \neq \vec{0}$, toutes les droites pour l'identité. N'oubliez pas de justifier que ces droites sont les **seules** globalement invariantes.

3.2.5.

a. Considérez le point $p = f(m)$ (pour un point m quelconque fixé).

b. Considérer le milieu de m et $f(m)$ (pour un point m quelconque fixé).

3.2.6.

a. Soit f l'unique application affine envoyant e_i sur a_i (on rappelle que e_i est un repère affine de E_k). Comme f préserve le barycentre elle envoie le point $(x_0, \cdots, x_k)$ de E_k, barycentre de $\{(e_0,x_0), \cdots, (e_k,x_k)\}$, sur le barycentre de $\{(f(e_0),x_0), \cdots, (f(e_k),x_k)\}$. Autrement dit, $f(x_0, \cdots, x_k) = b(x_0, \cdots, x_k)$, donc b est bien affine.

D'autre part, on a : $\overrightarrow{b(x_0,\cdots,x_k)b(y_0,\cdots,y_k)} = \Sigma(y_i - x_i)\overrightarrow{pa_i}$ quel que soit p dans E.

Prenons par exemple $p = a_0$. On obtient alors : $\overrightarrow{b(x_0,\cdots,x_k)b(y_0,\cdots,y_k)} = \Sigma(y_i - x_i)\overrightarrow{a_0a_i}$.

D'où $\vec{b}(\overrightarrow{(x_0,\cdots,x_k)(y_0,\cdots,y_k)}) = \Sigma(y_i - x_i)\overrightarrow{a_0a_i}$. Alors $\mathrm{Im}\,(\vec{b})$ est $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{a_0a_i})$ et $\mathrm{Ker}(\vec{b})$ est l'ensemble des $(\lambda_0, \cdots, \lambda_k)$ de somme nulle tels que $\Sigma\lambda_i\,\overrightarrow{a_0a_i} = \vec{0}$.

c. La fonction x_i préserve le passage au milieu, donc $x_i(m) = \frac{1}{2}(x_i(p) + x_i(q))$.

5. COMPOSITION DES APPLICATIONS AFFINES, ISOMORPHISMES AFFINES

5.1.1. D'après l'étude en 2.8, la première matrice du couple (A,B) est la matrice dans les bases canoniques de l'application linéaire associée à l'application affine f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, alors que la deuxième est la colonne représentant l'image de l'origine.

Donc on doit représenter $f' \circ f$ par $(A'.A, A'.B + B')$ (matrice d'une composée d'applications linéaires et équation matricielle d'une application linéaire).

5.1.3. Dans chaque cas, résoudre d'abord la question avec des applications linéaires puis utiliser 3.2.5.

6. GROUPE AFFINE

6.2.1. b. L'application linéaire associée est $(-\mathrm{Id}_{\vec{E}})^2 = \mathrm{Id}_{\vec{E}}$, donc $\sigma_a \circ \sigma_b$ est une translation. D'autre part, si b' est le symétrique de b par rapport à a, on a $\overrightarrow{bb'} = 2\overrightarrow{ba}$ et $\sigma_a \circ \sigma_b(b) = b'$: donc $\sigma_a \circ \sigma_b = t_{2\overrightarrow{ba}}$.

6.2.4. L'application $(A,B) \mapsto f_{A,B}$ définie en 2.8 sur toutes les couples de $\mathcal{A}_{n,n}$ envoie $\mathcal{GA}_n$ dans $GA(\mathbb{R}^n)$ puisque la matrice A est supposée inversible. Comme tout élément f de $GA(\mathbb{R}^n)$ est de la forme $f_{A,B}$ (d'après 2.8.2) avec A inversible (d'après 5.2), on en déduit que $(A,B) \mapsto f_{A,B}$ donne une bijection de $\mathcal{GA}_n$ sur $GA(\mathbb{R}^n)$. C'est de plus un morphisme pour les lois de compositions internes d'après 5.1.1. Donc $(\mathcal{GA}_n, .)$ est un groupe isomorphe à $(GA(\mathbb{R}^n), \circ)$.

Le groupe $(\mathcal{GA}_1, .)$ est l'ensemble des couples de réels (a,b) avec $a \neq 0$, muni de la loi de groupes $(a,b).(a',b') = (aa', ba' + b')$. L'élément neutre est $(1,0)$, l'inverse de (a,b) est $(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$.

Notons que $(\mathcal{GA}_1, .)$ n'est pas commutatif :
par exemple $(-1,0).(-1,2) = (1,2)$ alors que $(-1,2).(-1,0) = (1,-2)$.