Université de Lorraine
Département de Mathématiques, S4 Année universitaire 2014-2015

Examen final en Analyse, durée : 3h, mardi 26 mai 2015

Toute assertion devra être soigneusement justifiée. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction. Aucun document ni calculatrice autorisé. Les exercices des parties I et des parties II doivent être rédigées sur des copies séparées.

Partie I

Exercice I.1. (Questions de cours)

Soit $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convergeant simplement vers f sur $I=[a,b]$.

1. Donner la définition de la convergence uniforme de (f_n) vers f sur I.
2. Sous quelles conditions, la limite f est-elle dérivable sur I ?

Exercice I.2.

Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}x^n$.

Exercice I.3.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+$, où $f_n(x)=\frac{x}{n(1+x^n)}$, $x\in[0,+\infty[$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. (*On pourra calculer* f_n' *et* $\sup_{\mathbb{R}_+} f_n$)
3. Montrer que la série $\sum_n f_n(x)$ diverge pour tout $x\in\,]0,1]$. (*On pourra majorer* $1+x^n$)
4. Montrer que la série $\sum_n f_n(x)$ converge simplement pour $x\in\{0\}\cup\,]1,+\infty[$.

Partie II

Exercice II.1 (Questions de cours)

1. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $x_0\in\Omega$. Donner la définition du fait que la fonction $f:\Omega\to\mathbb{R}$ est différentiable au point x_0.
2. Soit T le triangle de sommets $(1,0)$, $(0,1)$ et $(-1,0)$. Calculer $I_0=\displaystyle\iint_T y\,dxdy$.
3. Soit $\omega=x^2dx-xydy$. Calculer l'intégrale de ω le long des deux chemins suivants :
   — le segment $[O;A]$ avec $O=(0,0)$ et $A=(1,1)$;
   — l'arc de parabole $x=y^2$ avec y qui va de 0 à 1.
   Est ce que ω admet une primitive sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice II.2

Soit g une fonction sur $\mathbb{R}^2$, définie par $g(x,y)=\frac{x^3y}{x^2+y^2}+2x-3y$ pour $(x,y)\neq(0,0)$ et $g(0,0)=0$

1. Calculer $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ pour tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
3. Etudier les dérivées partielles d'ordre 2 de g en $(0,0)$, et déterminer les valeurs quand elles existent.

Exercice II.3

Soit $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$, définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que f admet exactement trois points critiques dans $\mathbb{R}^2$. (*On pourra remarquer que tout point critique de* f *vérifie* $y=-x$)
2. Déterminer la nature de ces points critiques.

Exercice II.4

Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{x}{4}\le y\le 4x,\ \frac{1}{4}\le xy\le 4\}$. On se propose de calculer $I_1=\displaystyle\iint_D x\,dxdy$.

1. Faire un dessin du domaine D dans $\mathbb{R}^2$.
2. Soit un changement de variables $x=\frac{u}{v}$, $y=uv$. Exprimer le changement pour $dxdy$.
3. Montrer que le nouveau domaine de (u,v) est un carré.
4. Calculer I_1 avec le changement de variables proposé.