Université de Metz (UFR MIM)
Département de Mathématiques Année universitaire 2010-2011

L1MI - Mathématiques: Analyse

1 Dérivation et Dérivée

Exercice 1.1

Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

$$a(x) = \sqrt{x+1} - \ln(x + \sqrt{x+1}), \quad b(x) = \sin\left(\frac{\cos x}{1+x^3}\right) + e^{e^{x^2}}, \quad c(x) = \cos\left[(x^2+1)^2(x+2)\right],$$

$$d(x) = \ln\left[\ln(x^2+2x)\right], \quad e(x) = x + \ell^x + x^x \ \ (\ell > 0), \quad f(x) = (\sin x)^{\cos x} + (\ln x)^x x^{\ln x}.$$

Exercice 1.2

Déterminer l'ensemble des réels où les fonctions suivantes sont dérivables.
1) $f(x) = |x|$ sur $\mathbb{R}$.
2) $g(x) = (x-1)^2$ si $x < 1$ et $g(x) = x - 1$ si $x \geq 1$.
3) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction suivante: $h(x) = e^x - x - 1$ si $x < 0$; 0 si $0 \leq x < 1$; $(\ln x)/x$ si $x \geq 1$.
4) Déterminer les constantes a, b pour que la fonction suivante soit dérivable sur $\mathbb{R}$: $k(x) = x^{-1}$ si $x \leq -1$, $k(x) = ax + b$ si $x > -1$. Est ce une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$? Est ce qu'elle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 1.3

Soit $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$.
1) Montrer que f est infiniment dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$.
2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = x^{-m_n} P_n(x) e^{-1/x}$ si $x > 0$ où $m_n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n \in \mathbb{R}[x]$.
5) En déduire que f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.4

Calculer la dérivée n-ième des fonctions suivantes: $k(x) = \sin x$ et

$$f(x) = x^3 e^x, \qquad g(x) = \frac{1}{x}, \qquad h(x) = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Exercice 1.5

Tracer la fonction $h(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ et sa tangente au point $x = 1$.

Exercice 1.6

Montrer que $x \cos x - \sin x < 0$ sur $]0, \pi]$. En étudiant la fonction $\ell(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, montrer que si $0 < a < b \leq \pi$, alors $\sin b / \sin a < b/a$.

Exercice 1.7

En calculant de deux manières différentes la dérivée d'ordre n de $f(t) = (t^2 - 1)^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, prouver que

$$\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Exercice 1.8

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\exists\, C > 0$, $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^2$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

Exercice 1.9

Soit f définie par $f(x) = (3 - x^2)/2$ si $x < 1$ et $f(x) = x^{-1}$ si $x \geq 1$. Montrer que f satisfait aux hypothéses du Théorème des acroissements finis sur $[0, 2]$.

Exercice 1.10

Montrer que
1) $|\sin x| \leq x$ pour $x > 0$, et que $\lim_{x \to 0} \sin x / x = 1$.
2) $1 - \dfrac{x^2}{2} < \cos x$ pour $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.
3) $\forall\, x > 0$, $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

Exercice 1.11

Soient f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $a < c < b$ trois réels. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$\phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{b-a}[f(b) - f(a)] + \lambda \frac{(x-a)(b-x)}{2}.$$

1) Vérifier que $\phi(a) = \phi(b) = 0$.

Dans la suite on choisit λ de sorte que $\phi(c) = 0$.
2) En appliquant plusieurs fois le Théorème de Rolle, montrer qu'il existe $d \in \,]a, b[$ tel que $\phi''(d) = 0$.
3) En déduire que $\lambda = -f''(d)$ et

$$f(c) - f(a) - \frac{c-a}{b-a}[f(b) - f(a)] = -f''(d)\frac{(c-a)(b-c)}{2}.$$

4) Montrer que si $a < x < b$, on a:

$$0 < \frac{(x-a)(b-x)}{2} \leq \frac{(b-a)^2}{8}.$$

5) Conclure que pour tout $x \in \,]a, b[$,

$$\left| f(x) - f(a) - \frac{x-a}{b-a}[f(b) - f(a)] \right| \leq \sup_{d \in [a,b]} |f''(d)| \times \frac{(b-a)^2}{8}.$$

Exercice 1.12

1) Appliquer le Théorème des accroissements finis à la fonction $f(x) = \ln(\ln x)$ sur l'intervalle $[k, k+1]$ pour $k > 1$. En déduire que la suite

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$$

tend vers ∞ quand $n \to \infty$.
2) En utilisant le Théorème des accroissements finis, étudier la limite de $x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$ en ∞.
3) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f'(0) = -1$. Montrer qu'il existe $x_1 \in \,]0,1[$ telle que $f(x_1) < 0$, puis qu'il existe $x_2 \in \,]0,1[$ telle que $f(x_2) = 0$ et finalement qu'il existe $x_3 \in \,]0,1[$ telle que $f'(x_3) = 0$.

2 Fonctions Réciproques

Exercice 2.1

Est ce que les assertions suivantes sont vraies?
1) $\sin(\arcsin x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$.
2) $\arcsin(\sin x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Déterminer les valeurs suivantes:

$$\arcsin\left(\sin\frac{2009\pi}{3}\right), \quad \arccos\left(\cos\frac{2009\pi}{3}\right).$$

Exercice 2.2

Montrer que

$$\arcsin\left(\frac{4}{5}\right) = 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad \arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi.$$

Exercice 2.3

Démontrer les égalités suivantes:
1) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $\forall\, x \in [-1,1]$.
2) $\arcsin x + \arcsin\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$, $\forall\, x \in [0,1]$.

Exercice 2.4

Simplifier les expressions suivantes: $A(x) = \arccos(1-2x^2)$ puis

$$B(x) = \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad D(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}, \quad F(x) = \arccos(\cos x) + \frac{\arccos[\cos(2x)]}{2}.$$

Exercice 2.5

Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par:

$$f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}).$$

1) Montrer que f est impaire. Déterminer le domaine de continuité et celui de dérivabilité de f.
2) Calculer la dérivée de f sur son domaine de dérivabilité.

Exercice 2.6

Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Ces deux fonctions s'appellent respectivement cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique, on les note par $f(x) = \mathrm{ch}x$ et $g(x) = \mathrm{sh}x$.

1) Montrer que les deux fonctions sont infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Calculer leurs dérivées et tracer les deux fonctions.
2) Vérifier que $\text{ch}^2 x = 1 + \text{sh}^2 x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3) Montrer que ch$x$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, \infty[$. On note la fonction réciproque par argch : $[1, \infty[\to [0, \infty[$. Sur quel intervalle la fonction argch est dérivable?
4) Montrer que $(\text{argch})'(x) = 1/\sqrt{x^2 - 1}$ pour $x > 1$.
5) De même, montrer que sh$x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Notons sa fonction réciproque par argsh, montrer que argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.
6) Tracer les courbes de argch et de argsh.
7) Montrer que

$$\text{argch}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \quad \forall\, x \geq 1; \qquad \text{argsh}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2.7

Soit $\text{th}x = \text{sh}x/\text{ch}x$, la fonction appelée tangente hyperbolique.
1) Où est définie la fonction th?
2) Montrer que th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $\text{th}(\mathbb{R}) =]-1, 1[$.
3) Notons argth la fonction réciproque de la fonction th. Montrer que

$$\text{argth}x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} \quad \forall\, x \in]-1, 1[.$$

Calculer $(\text{argth})'(x)$ sur $]-1, 1[$. En déduire sa dérivée d'ordre 2009.
4) Tracer les courbes de th et argth.

Exercice 2.8

Résoudre les équations suivantes:

$$\arcsin x = \arcsin \frac{2}{5} + \arcsin \frac{3}{5}, \quad \arcsin(2x) - \arcsin x = \arcsin(\sqrt{3}x), \quad 3\text{ch}x + 2\text{sh}x = 4.$$

Exercice 2.9

Calculer la dérivée des fonctions suivantes:

$$\arccos\left(\frac{1}{\text{ch}x}\right), \quad \arctan(\text{th}x), \quad \text{argch}\sqrt{x^2 - 1}, \quad \text{argth}(\arctan x), \quad \arctan\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Exercice 2.10

Montrer que

$$0 < \arcsin x < \frac{x}{1 - x^2} \text{ si } 0 < x < 1, \quad \arctan a > \frac{a}{1 + a^2} \quad \forall\, a > 0, \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}} = 1.$$

Exercice 2.11

Simplifier les fonctions suivantes sur leur domaine de définition.

$$f(x) = \text{argch}\sqrt{\frac{1 + \text{ch}x}{2}}, \quad \text{puis} \quad g(x) = \text{argth}\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

Exercice 2.12

Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f(x) = 2xe^{x^2}$.
1) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que f^{-1} est dérivable.
2) Déterminer $f^{-1}(0)$ et $(f^{-1})'(0)$.
3) Montrer que f^{-1} est deux fois dérivable et calculer $(f^{-1})''(0)$.

3 Formule de Taylor et Développements Limités

Exercice 3.1

Soit f une fonction deux fois dérivable au point $x_0 \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite éventuelle quand h tend vers 0 de

$$\frac{2f(x_0+3h)+3f(x_0+2h)-5f\left(x_0+\frac{12}{5}h\right)}{h^2}.$$

Exercice 3.2

Soit $f(x)=e^{x^{10}}$, calculer $f^{(2009)}(0)$ puis $f^{(2010)}(0)$.

Exercice 3.3

Soit f une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f^{(n)}(0)=0$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$. Supposons que $\left|f^{(n)}(x)\right|\leq n!$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{N}$.
1) Montrer par la formule de Taylor-Lagrange que $f(x)=0$ pour $x\in\,]-1,1[$.
2) En déduire que $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $f(x)=0$.

Exercice 3.4

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère la relation suivante:

$$\forall\, a,h\in\mathbb{R},\quad f(a+h)-f(a-h)=2hf'(a). \tag{P}$$

1) Soit $\phi(x)=Ax^2+Bx+C$ i.e. $\phi\in\mathbb{R}_2[x]$, montrer que ϕ satisfait (P).
2) Supposons que f est une fonction de classe C^3 vérifiant (P). Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour f entre $a+h$ et a, puis entre $a-h$ et a. En déduire que $f^{(3)}(a)=0$. Montrer que f est un polynôme de degré ≤ 2.
3) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie (P). Montrer que

$$f'(x)=\frac{f(x+1)-f(x-1)}{2},\quad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Que peut on dire sur f?

Exercice 3.5

Déterminer le développement limité au voisinage de 0 des fonctions suivantes à l'ordre indiqué entre parenthèse:

$$\tan x\ \ (5);\quad \tan^2 x\ \ (6);\quad \frac{x}{\sin x}\ \ (4);\quad \frac{\ln(1+x)}{1+x}\ \ (3);\quad \ln(1+x\sin x)\ \ (4);\quad \ln\frac{x}{\sin x}\ \ (3);$$

$$e^{\cos x}\ \ (4);\quad \frac{x}{\cos x}\ \ (4);\quad e^{\frac{\arctan x}{x}}\ \ (3);\quad \arctan^2 x\ \ (6);\quad \frac{1}{\sqrt{1+\tan x}}\ \ (3);\quad (\cos x)^x\ \ (3).$$

Exercice 3.6

Déterminer le développement limité
1) au voisinage de $x=\frac{\pi}{4}$ à l'ordre 4 de $(\cos 2x)^2$;
2) au voisinage de $x=1$ à l'ordre 4 de xe^x.

Exercice 3.7

Soit la fonction f valant 1 en 0 et définie par :

$$f(x)=\frac{\sin x}{x-2x^2},\qquad \text{si}\ \ x\neq 0.$$

1) Donner un développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction sinus.
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f en 0.
3) Quelle est l'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0?
4) Etudier la position de la courbe de f par rapport à T.

Exercice 3.8

Soit $f(x) = e^{\cos x - 1 + x}$, déterminer la droite tangente en 0 pour f et préciser sa position par rapport à la tangente au voisinage de $x = 0$.

Exercice 3.9

Déterminer les limites éventuelles: ($a > 0$ est une constante)

$$1)\ \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}, \quad 2)\ \lim_{x\to 0} \frac{(\tan x)^2 + 2\cos x - 2}{x^4}, \quad 3)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - e}{x^2}, \quad 4)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 2x};$$

$$5)\ \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - \arctan x}{\sqrt{1+x^3} - 1}; \quad 6)\ \lim_{x\to 1} (x^2 + 2x - 3) \tan \frac{\pi x}{2}; \quad 7)\ \lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos x - \cos(5x)}{\sin x - \sin(5x)};$$

$$8)\ \lim_{t\to 1} \frac{t \ln t}{t^2 - 1}, \quad 9)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}; \quad 10)\ \lim_{x\to a} \frac{x^a - x^x}{x^x - a^x}; \quad 11)\ \lim_{x\to 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{-1}{\sin^2 x}} - (\cos x)^{\frac{2}{x^2}}}{x^2}.$$

Exercice 3.10

Trouver le développement généralisé des fonctions suivantes en ∞ à l'ordre 3:

$$1)\ (x^3+1)^{\frac{1}{3}} - \sqrt{x^2+1}; \quad 2)\ \left(\frac{x+1}{x}\right)^x; \quad 3)\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x + 1}; \quad 4)\ \operatorname{argch}^2 x.$$

Calculer $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^3 \sin(x^{-1})} - x\right)$ et $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x \ln(e^x - 1)}{x^2 + 1}$.

Exercice 3.11

Soit $f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)$.
1) Donner le domaine de définition de f, puis sa limite en -1^+ et en -1^-.
2) Calculer la dérivée de f.
3) Déterminer l'équation de l'asymptote à la courbe de f en ∞ et en $-\infty$, préciser leur position par rapport à la courbe.

4 Integrale de Riemann et Primitive

Exercice 4.1

Calculer les intégrales suivantes:

$$\int 3t\sqrt{t}dt, \quad \int_0^4 \frac{tdt}{\sqrt{9+t^2}}, \quad \int \cos^2(x)dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\sin(x)dx, \quad \int \frac{\arctan t}{1+t^2}dt,$$

$$\int \ln x dx, \quad \int_0^1 \frac{dx}{(3x+1)^n} \ (n \in \mathbb{N}), \quad \int (\tan t)^n dt \ (n = 1, 2, 3), \quad \int \sin(2x) + \cos\left(\frac{x}{3}\right) dx.$$

Exercice 4.2

Considérons la fonction $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$.

1) Vérifier que c'est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Montrer que c'est une fonction paire.
2) Montrer que c'est une fonction croissante sur $[0, \infty[$ et que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
3) Montrer qu'il existe une asymptote à la courbe $y = f(x)$ quand $x \to \infty$ et préciser la position de la courbe par rapport à l'asymptote.
4) Tracer la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 4.3

Soient $f(x) = x^2/2$ et $g(x) = (1 + x^2)^{-1}$ définie sur $\mathbb{R}^+$. Tracer les courbes de f et de g, en quel point sont-elles sécantes? Calculer l'aire du domaine délimité par les deux courbes précédentes et la droite $x = 0$.

Exercice 4.4

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Montrer que

$$P(\lambda) = \int_a^b [\lambda f(x) + g(x)]^2 \, dx$$

est un polynôme de λ sur $\mathbb{R}$ et $P(\lambda) \geq 0$. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 4.5

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que si f est une fonction C^1 de $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a) = 0$, alors

$$\int_a^b f^2(x)dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'^2(x)dx.$$

Exercice 4.6

Calculer les limites des sommes suivantes quand n tend vers ∞:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}, \qquad \sum_{k=n}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2}, \qquad \prod_{1\leq k\leq n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 4.7

Déterminer les intégrales suivantes, au moyen des intégrations par partie

$$\int_0^1 \arctan x dx, \qquad \int (x^2 + 2x)e^x dx, \qquad \int e^x \cos x dx, \qquad \int \operatorname{argsh} t dt.$$

Exercice 4.8

En utilisant le changement de variable $u = \sqrt{e^x - 1}$, calculer

$$I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx.$$

Exercice 4.9

Soient

$$I_1 = \int_0^\pi \cos^2 t dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^\pi \sin^2 t dt.$$

Montrer à l'aide des changements de variable que

$$I_1 = I_2 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt.$$

En déduire (sans calculer la primitive) la valeur de I_1.

Exercice 4.10

Calculer les primitives des fonctions suivantes (préciser l'ensemble de définition)

$$\frac{x^3-2}{x^3-x^2}, \quad \frac{1}{x^2-2x+2}, \quad \frac{x^4}{(x-1)(x^2+x-2)}, \quad \frac{1}{x^2-4x+2}.$$

Exercice 4.11

Trouver les primitives des fonctions suivantes à l'aide d'un changement de variable convenable.

$$x^2\sqrt{1+x^3}, \quad \frac{e^x}{1+e^{2x}}, \quad \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}, \quad \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}, \quad (\arcsin x)^2.$$

Exercice 4.12

Soient $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx.$$

a) En posant $t = \frac{\pi}{2} - x$, montrer que $I_n = J_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer I_n pour $n = 0, 1, 2$.
b) Montrer que si $n \geq 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$. Montrer que la suite I_n est décroissante, en déduire que $\lim_{n\to\infty} I_{n+1}/I_n = 1$.
c) Montrer que pour $n \geq 0$,

$$I_{2n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

d) Déduire de a) et c) que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 4.13

Calculer les intégrales suivantes:

$$\int \big[\cos x\cos(2x) + \sin(3x)\sin(4x)\big]dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}, \quad \int (\mathrm{ch} x)^2 \mathrm{sh} x dx, \quad \int (\sin x)^3(\cos x)^2 dx.$$

Exercice 4.14

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$, montrer par l'intégration par partie, que

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right] + \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(b-x)(a-x)dx.$$

Exercice 4.15

Calculer les primitives suivantes: (ne vous précipitez pas, réfléchir à trouver la meilleure idée)

$$\int \frac{x^3 dx}{x^4+3x^2+2}, \quad \frac{x^4+1}{x(x-1)^3}dx, \quad \int \frac{1+x}{x^4(1+x+x^2)}dx.$$

5 Révision et Divers

Exercice 5.1

Calculer les intégrales suivantes:

$$I = \int_2^3 \frac{x+2}{x^2-5x+4}dx \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx.$$

Pour J, on peut essayer le changement de variable $s = \tan(x/2)$.

Exercice 5.2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right).$$

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2) Déterminer les limites de la fonction f à droite et à gauche en $\sqrt{3}$, puis les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3) Calculer la dérivée f'.
4) Dresser le tableau de variation de f.
5) Dessiner proprement la courbe de la fonction f.

Exercice 5.3

Calculer la limite de

$$\frac{3x^3+2x^2+x}{3x^3-2\sin x}$$

en 1, 0, $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 5.4

Calculer, en utilisant des développements limités, les limites suivnates:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(x^2)-1}{x^3\sin x}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos x}{1-(1-x^2)^{2009}}.$$

Exercice 5.5

Calculer les primitives suivantes:

$$\int x^3 \arctan x dx, \qquad \int \frac{3x^2+2}{x(x^2-4)}dx, \qquad \int \frac{x^2+2}{x\sqrt{x+1}}dx.$$

Pour la dernière intégrale, on peut poser $u = \sqrt{x+1}$.

Exercice 5.6

Montrer à l'aide du Théorème des acroissements finis que

$$\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}, \qquad \forall\, k \geq 1.$$

Soit

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Montrer que $u_n \geq \ln(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que la suite (u_n) diverge. Montrer que la suite $v_n = \frac{u_n}{\ln(n+1)}$ est bornée.

Exercice 5.7

Soit $f(x) = e^{x^3}$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f'''(x)$.
1) En utilisant $f'(x) = 3x^2 f(x)$, montrer que pour $n \geq 3$,

$$f^{(n)}(x) = 3x^2 f^{(n-1)}(x) + 6(n-1)x f^{(n-2)}(x) + 3(n-1)(n-2) f^{(n-3)}(x).$$

2) En déduire que

$$f^{(n)}(0) = 3(n-1)(n-2) f^{(n-3)}(0), \quad \forall\, n \geq 3.$$

3) Peut on déterminer facilement $f^{(2009)}(0)$?

Exercice 5.8

Déterminer le domaine de définition et calculer la dérivée des fonctions suivantes:

$$f_1(x) = \arcsin(2x-1) \qquad \text{et} \qquad f_2(x) = \arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

Exercice 5.9

Ecrire sans aucun calcul tous les polynômes de degrè 2 vérifiant $P(3) = 3$, $P'(3) = 2$ et $P''(3) = 12$. Combien y en a t-il?

Exercice 5.10

Déterminer le domaine de définition et tracer les deux fonctions suivantes: $h_1(x) = \sin(\arcsin x)$ et $h_2(x) = \arcsin(\sin x)$.

Exercice 5.11

Soit $h(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{(1-x)^2}$. Sur quel domaine est définie cette fonction? Déterminer la droite tangente en 0 et la position de courbe par rapport à la tangente au voisinage de 0.

Exercice 5.12

Déterminer le domaine de définition et simplifier la fonction $H(x) = \arctan(e^x) - \arctan\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$.

Exercice 5.13

Calculer

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x(x-\pi)} \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to 4} \frac{\sqrt{2t+1}-3}{\sqrt{t-2}-\sqrt{2}}.$$

Exercice 5.14

Déterminer $\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right)$.

Exercice 5.15

Trouver des constantes a, b et c telles que

$$G(x) = x^2 \arctan\left[\frac{3x-1}{3(x^2+x+1)}\right] = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{c}{x}\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x) = 0$. En déduire l'asymptote de $G(x)$ en ∞ ainsi que la position de la courbe de G par rapport à cette asymptote au voisinage de ∞.

Université de Metz (UFR MIM)
Département de Mathématiques Année universitaire 2008-2009

L1 - Mathématiques

Contrôle Continu - le 16 mars 2009

Durée: 2h, aucun document ni calculatrice autorisé.

Exercice I: Déterminer les limites éventuelles suivantes.

$$1)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(2x) - 3x\sin x}{x^4}, \qquad 2)\ \lim_{x\to 1} \frac{x\ln x}{x^2-1}.$$

Exercice II: Calculer le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $f(x) = \sqrt{1-2x}$ en $x_0 = 0$. En déduire l'équation de la tangente à la courbe $y = f(x)$ en $x_0 = 0$. Préciser la position de la tangente par rapport à la courbe au voisinage de $x_0 = 0$.

Exercice III: Fixer $0 < a < b$. Considérons la fonction f définie par

$$f(t) = \ln(ta + (1-t)b) - t\ln a - (1-t)\ln b.$$

1) Donner D_f, le domaine de définition pour f. Expliquer rapidement pourquoi f est infiniment dérivable sur D_f.
2) Que vaut $f(0)$ et $f(1)$? Calculer la fonction dérivée f'.
3) Enoncer soigneusement le Théorème des accroissements finis, puis montrer que
$$\frac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a}.$$
4) En déduire que $f'(0) > 0$ et que $f'(1) < 0$.
5) Calculer la dérivée seconde f''. En déduire qu'il existe un *unique* point $t_0 \in]0,1[$ tel que $f'(t_0) = 0$.
6) Etablir le tableau de variation de f sur $[0,1]$ à l'aide de t_0, et montrer que
$$\forall\ 0 < t < 1, \quad \ln(ta + (1-t)b) > t\ln a + (1-t)\ln b.$$

Exercice IV : Soit

$$h(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right).$$

1) Montrer que la fonction h est définie sur $I = [-1,1] \setminus \{0\}$.
2) La fonction h est elle paire ou impaire? Déterminer le domaine sur lequel h est dérivable. Justifier vos réponses.
3) Montrer que
$$h'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ pour tout } x \in]-1,0[\cup]0,1[.$$
4) Simplifier l'expression de h sur $]0,1]$ puis sur $[-1,0[$.
5) Tracer la fonction h.
6) Peut on prolonger par continuité la fonction h au point $x = 0$? **(Fin)**

Université de Metz (UFR MIM)
Département de Mathématiques Année universitaire 2008-2009

L1 - Mathématiques

Examen Final - le 19 mai 2009

Durée: 2h, aucun document ni calculatrice autorisé.

Exercice I: Calculer

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{4k}{n}\right)}{n}.$$

Exercice II: Déterminer

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{(\sin x)^2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x}-x-1}{(x-1)^2}.$$

Exercice III: Calculer les primitives suivantes.

$$\int\frac{e^x}{e^x+1}dx \qquad \text{et} \qquad \int\frac{x^3+1}{(x-1)^2(x+2)}dx.$$

Exercice IV : Déterminer

$$\int_0^{\pi}x^2\sin x dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^1\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx.$$

Pour la deuxième intégrale, on peut essayer de faire un changement de variable.

Exercice V : Soit th la fonction tangente hyperbolique, c'est à dire

$$\text{th}x=\frac{\text{sh}x}{\text{ch}x} \quad \text{où} \quad \text{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \;\; \text{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

1) Que vaut la dérivée de la fonction th?

2) En déduire que th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et montrer que son image $\text{th}(\mathbb{R})=\,]-1,1[$.

3) Notons argth la fonction réciproque de la fonction th. Vérifier que $(\text{argth})'(x)=\frac{1}{1-x^2}$.

4) Soit

$$f(x)=\text{argth}\left(\frac{3\text{th}x+1}{3+\text{th}x}\right).$$

Montrer que pour tout réel x, on a

$$-1<\frac{3\text{th}x+1}{3+\text{th}x}<1,$$

et déterminer ainsi le domaine de définition de f.

5) Calculer $f'(x)$.

6) Simplifier l'expression de la fonction f. **(Fin)**

S2 MI 2009-2010 Université Paul Verlaine de Metz
Mardi 9 mars 2010

Partiel en Analyse d'une variable réelle II

Durée: 2h00 - Aucun document ni calculatrice autorisé.

Exercice I: Soient
$$h(x) = 1 - \frac{1}{x} - \ln x \quad \text{et} \quad f(x) = x^{\frac{1}{x-1}}.$$

1) Déterminer les domaines de définition $\mathcal{D}_h$ et $\mathcal{D}_f$ pour h et f. Expliquer rapidement pourquoi h et f sont dérivables respectivement sur leur domaines de définition.
2) Calculer $h'(x)$ et déterminer son signe. Etablir le tableau de variation de h.
3) En déduire que $h(x) \leq 0$ sur $]0, \infty[$.
4) Calculer $f'(x)$. Montrer que $f' \leq 0$ sur $\mathcal{D}_f$ (Indication: On peut essayer de trouver un lien entre f' et h).
5) Montrer que f peut se prolonger par continuité au point $x = 1$. Déterminer la limite de f en ∞.
6) Tracer les deux fonctions f et h.

Exercice II: Soit $B(x) = \arctan\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)$.

1) Montrer que B est définie sur $J = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que B est une fonction impaire.
2) Calculer $B'(x)$ sur J.
3) Que vaut $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$? En déduire une expression simple de la fonction B sur $]0, \pi[$.
4) Tracer la fonction B pour $x \in J \cap]-3\pi, 3\pi[$.
5) Peut on prolonger la fonction B par continuité en $x = 0$? Même question pour $x = \pi$.

Exercice III: En utilisant le Théorème des accroissements finis, montrer que
$$\lim_{x\to\infty} x^3 \left[e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}}\right] = 2.$$

Exercice IV:
1) Soient g une fonction de classe C^∞ et $S(x) = xg(x)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$S^{(n+1)}(x) = (n+1)g^{(n)}(x) + xg^{(n+1)}(x). \qquad (*)$$

Soit $H_n(x) = x^n e^{\frac{1}{x}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On voudrait montrer la formule suivante:
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad H_n^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} e^{\frac{1}{x}} \quad \text{sur } \mathbb{R}^*. \qquad (**)$$

2) Vérifier $(**)$ pour $n = 0$ puis pour $n = 1$.
3) Démontrer par récurrence la formule $(**)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (Indication: On peut essayer d'utiliser la formule $(*)$).

(Fin)

S2 MI 2009-2010 Université Paul Verlaine de Metz
Mardi 18 mai 2010

Examen Final en Analyse d'une variable réelle II

Durée: 2h00 - Aucun document ni calculatrice autorisé. Les barêmes sont à titre indicatif.

Exercice I (7 points):

1. Calculer $\int \frac{x^2+2}{x(x^2-1)}dx$. En déduire la valeur de $\int_2^3 \frac{x^2+2}{x(x^2-1)}dx$

2. Calculer les primitives suivantes:

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}dx \qquad \text{et} \qquad \int \frac{1}{1+\mathrm{sh}(x)}dx.$$

Indication: on peut utiliser le changement de variable $u = e^x$ pour la deuxième intégrale.

Exercice II (3 points):

1. Calculer le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $h(x) = (1-x) + \ln x$ au point $x = 1$.

2. En déduire la limite de $f(x) = \frac{(1-x)+\ln x}{(x-1)^2}$ quand x tend vers 1.

Exercice III (5 points):

1. Rappeler le théorème des accroissements finis.

2. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par: $f(x) = e^x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

2.1. Soit $h \in \mathbb{R}^*$. Montrer qu'i existe $c_h \in]0, h[$ ou $c \in]h, 0[$ tel que: $f(h) - f(0) = hf'(c_h)$.

2.2. Notons par $\tau(h)$ le réel tel que $c_h = h\tau(h)$. Montret que

$$\forall\, h \in \mathbb{R}^*, \quad \tau(h) = \frac{1}{h}\ln\left(\frac{e^h-1}{h}\right).$$

2.3. Montrer que la limite de $\tau(h)$ quand h tend vers 0 est égale à $\frac{1}{2}$.

Exercice IV (5 points):

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Rappeler la formule de Taylor-Lagrange (i.e. la formule de Taylor avec reste de Lagrange) à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de la fonction cosinus entre 0 et x, c'est à dire, sur l'intervalle $[0, x]$ ou $[x, 0]$.

2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, il existe c_1 et c_2 dans $]0, x[$ ou dans $]x, 0[$ tels que:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}\cos(c_1) \qquad \text{et} \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\cos(c_2).$$

3. En déduire que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

(Fin)

S2 MI 2009-2010 Université Paul Verlaine de Metz
Mardi 22 juin 2010

Examen de Rattrapage en Analyse d'une variable réelle II

Durée: 2h00 - Aucun document ni calculatrice autorisé. Les barèmes sont à titre indicatif.

Exercice I (6 points): Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et que f est une fonction paire.

2. Calculer les fonctions f' et f''.

3. Montrer que f est croissante sur $[0, +\infty[$.

4. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)$, puis la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand x tend vers ∞.

Exercice II (7 points):

1. Calculer $\displaystyle\int \sin(2x)\sin(x)dx$. En déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\sin(x)dx$.

2. Calculer $\displaystyle\int x\ln(x+3)dx$. En déduire $\displaystyle\int_{-6}^{-4} x\ln(x+3)dx$.

3. Calculer $\displaystyle\int \frac{x-4}{(x^2+2)(x-1)^2}dx$.

Exercice III (3 points):

Calculer la limite de

$$H(x) = \frac{\sqrt{1+x} - e^x - 1 + \frac{x}{2}}{x^2}$$

quand x tend vers 0.

Exercice IV (4 points)[1]:

Soit g une fonction deux fois dérivable sur I, un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

1. Soit $a \in I$, écrire avec précision la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 au point a.

2. En utilisant le les développements à l'ordre 2 de $g(a+2h)$, puis de $g(a+h)$ au point a, calculer la limite de

$$\frac{g(a+2h) - 2g(a+h) + g(a)}{h^2}$$

quand h tend vers 0.

Exercice V (4 points):

1. Citer avec précision le Théorème sur la somme de Riemann.

2. Calculer la limite de u_n quand $n \to \infty$ où

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n+2k)^3}{n^4}, \qquad \forall\, n \geq 1.$$

(Fin)

[1] Vous avez la possibilité de choisir l'un des deux derniers exercices, c'est à dire Exercice IV ou bien Exercice V. Si vous essayez de faire les deux, on ne prendra en compte que la meilleure note de ces deux exercices.