TD 1 : Nombres complexes

Exercice 1

Écrire les nombres complexes suivants sous forme polaire :

1. $z_1 = \left(\dfrac{1+3i}{1-2i}\right)^{15}$
2. $z_2 = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^{51}$
3. $z_3 = 1 - e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi[$

Exercice 2

Résoudre les équations et inégalités suivantes :

1. $z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0$
2. $z^3 + \overline{z} = 0$
3. $\left|\dfrac{z-i}{z+2}\right| < 2$
4. $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z+i}{z-1}\right) > 1$

Exercice 3

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ et

$$\Delta = \{t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_3\,;\, t_1, t_2, t_3 > 0\,, t_1 + t_2 + t_3 = 1\}$$

1. Esquisser Δ
2. Montrer qu'il existe une constante $K > 1$ telle que

$$|1 - z| \leq K(1 - |z|) \quad \text{pour tout } z \in \Delta\,.$$

Exercice 4

On considère la transformation complexe $f : z \mapsto 5z^4$. Déterminer les points du plan qui sont envoyés par f sur :

1. la droite réelle ;
2. la droite des imaginaires purs.

Exercice 5

On considère la transformation complexe $f : z \mapsto z^4 + \overline{z}z^3$. Déterminer les points du plans qui sont envoyés par f sur la droite $i\mathbb{R}$.

Exercice 6

Soit $a \in \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$. On considère la transformation homographique f_a définie pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1/\overline{a}\}$ par

$$f_a(z) = \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}.$$

1. Montrer que f_a est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{1/\overline{a}\}$ sur son image (à déterminer).
2. Montrer que f_a est une bijection de $\mathbb{D}$ dans lui-même (*Indication : commencer par montrer que si* $z \in [0, 1[$, *alors* $f_a(z) \in \mathbb{D}$).
3. Quelle est l'image de $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ par f_a ?

Exercice 7

Soient $(a_j, b_j)_{j \in \{1 \dots n\}} \subset \mathbb{D} \times \mathbb{D}$. Montrer que

$$\left| \prod_{j=1}^{n} a_j - \prod_{j=1}^{n} b_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j - b_j|.$$

Exercice 8

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes tels que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On suppose que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ converge vers $l \geq 0$. Montrer que $|a_n|^{\frac{1}{n}} \to l$.
2. Montrer qu'en général (sans l'hypothèse de la question précédente), on a :

$$\liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \liminf |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

3. Déterminer $\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

TD 2 : Fonctions holomorphes

Exercice 9

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. On suppose que f est de classe C^2 comme fonction sur $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'alors $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des fonctions harmoniques.

NB : on dit qu'une fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est harmonique si son Laplacien est nul, c'est-à-dire si $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

Exercice 10

Déterminer tous les points de $\mathbb{C}$ en lesquel les fonctions suivantes sont holomorphes :

1. $f(x, y) = y^2 \sin x + iy$
2. $g(x, y) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2 y - y^3)$
3. $h(x, y) = x^4 y^5 + ixy^3$

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. Montrer que f admet des dérivées partielles selon x et y en 0 et y vérifie les équations de Cauchy-Riemann. La fonction f est-elle holomorphe en 0 ?

Exercice 12

Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont $\mathbb{R}$-différentiables.

1. Montrer que :
   (a) $\dfrac{\partial z}{\partial z} = 1$
   (b) $\dfrac{\partial z}{\partial \overline{z}} = 0$
   (c) $\dfrac{\partial \overline{z}}{\partial z} = 0$
   (d) $\dfrac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} = 1$
2. Montrer que si f est une fonction $\mathbb{R}$-différentiable sur $\mathbb{C}$:
$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}$$
3. Montrer que les dérivées de Wirtinger vérifient la règle du produit :
$$\frac{\partial}{\partial z}(fg) = f\frac{\partial g}{\partial z} + g\frac{\partial f}{\partial z} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(fg) = f\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} + g\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$$
   avec g une autre fonction $\mathbb{R}$-différentiable sur $\mathbb{C}$.
4. Montrer la règle de la chaîne :
$$\frac{\partial}{\partial z}(f \circ g) = \frac{\partial g}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z} \circ g\right) + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \circ g\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f \circ g) = \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial f}{\partial z} \circ g\right) + \frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \circ g\right)$$
5. Montrer que si f est holomorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors $g : z \mapsto f(\overline{z})$ est « anti-holomorphe »sur Ω, c'est-à-dire $\frac{\partial g}{\partial z} = 0$. Montrer que de plus $\frac{\partial g}{d\overline{z}}(z) = f'(\overline{z})$.

Exercice 13

Déterminer (pas forcément dans cet ordre) tous les points en lesquels les fonctions suivantes sont $\mathbb{R}$-différentiables, puis holomorphes, et calculer les dérivées complexes éventuelles.

1. $f(z) = (|z|^2 - 1)e^{\overline{z}}$,
2. $g(z) = \exp\left(-\frac{1}{z^4}\right)$ si $z \neq 0$ et $g(0) = 0$,
3. $h(z) = \overline{z}^4(1 - |z|^5)$,
4. $k^*(z) = \overline{k(\overline{z})}$, avec k holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Exercice 14

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$. Montrer que sous chacune des conditions suivantes, f est constante sur Ω :

1. $\operatorname{Im} f$ est une fonction constante,
2. $\operatorname{Arg} f$ est une fonction constante (en supposant que f ne s'annule pas dans Ω),
3. $|f|$ est une fonction constante,
4. $(\operatorname{Im}(f))^2 - \operatorname{Re} f$ est une fonction constante.

TD 3 : Intégrales de contour

Exercice 15

Soit γ le chemin déterminé par la frontière du domaine $\{z \in \mathbb{C}, 1 < |z| < 2, \operatorname{Im}(z) > 0\}$, parcourue dans le sens direct. Calculer l'intégrale $\int_\gamma \frac{\bar{z}}{z} dz$.

Exercice 16

1. Soit $S_\alpha = \{z \in \mathbb{C}, 0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \alpha\}$, avec $0 < \alpha \leq 2\pi$. Soit $f : S_\alpha \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable avec $\lim_{z\to\infty, z\in S} zf(z) = A$. Montrer qu'alors
$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} f(z)dz = i\alpha A,$$
où γ_r est l'arc du cercle $|z| = r$ contenu dans S_α (parcouru dans le sens direct).
2. Soit f une fonction mesurable sur le demi-plan supérieur $H = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$. Supposons que $\lim_{z\to\infty, z\in H} f(z) = 0$. Soit $\gamma_r = \{z \in H, |z| = r\}$ (parcouru dans le sens direct) et $m > 0$. Montrer que
$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} e^{imz} f(z)dz = 0.$$

Exercice 17

Montrer que
$$\int_0^\infty \cos(x^2)dx = \int_0^\infty \sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$
Pour cela, on intègrera la fonction $z \mapsto e^{iz^2}$ le long du chemin déterminé par la frontière du secteur $0 \leq |z| \leq R$, $0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{4}$.

Exercice 18

D'après le théorème de Weierstrass, toute fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$ est la limite uniforme de polynômes à coefficients complexes. Est-ce que toute fonction continue sur le disque unité fermé peut-être approchée de manière uniforme par des polynômes de la variable $z \in \mathbb{C}$?

Exercice 19

Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\xi} e^{-\pi x^2} dx = e^{-\pi\xi^2}$.

Exercice 20

Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} - 1}{2ix} dx$, puis en déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 21

Soit Ω un ouvert simplement connexe et u une fonction réelle de classe C^2, harmonique sur Ω. Montrer qu'il existe une fonction f holomorphe sur Ω telle que $u = \operatorname{Re} f$.

TD 4 : Séries entières

Exercice 22

1. *(Lemme de Césaro)* Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui converge vers l quand $n \to \infty$, avec $l \in [-\infty; +\infty]$. Montrer qu'alors
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_k \xrightarrow[n\to\infty]{} l.$$
2. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes avec $b_n \neq 0$ pour tout n. On suppose que $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|$ converge vers une limite $l \in [0; \infty]$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} |b_n|^{\frac{1}{n}} = l$.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$.

Exercice 23

Déterminer le rayon de convergence des séries suivantes, et étudier la convergence sur la frontière de leur disque de convergence.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$,
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n z^{3n}$,
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2(4^n + 3n)}$.
4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{\ln n}$.

Avertissement : certaines des séries présentées sont légèrement différentes de celles étudiées en classe. Les raisonnement sont cependant les mêmes !

Exercice 24

1. Soit $f : z \mapsto \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $R(f)$. On fixe $k \in \mathbb{N}^*$ et on pose $g(z) = f(z^k)$, pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que g est une série entière et déterminer son rayon de convergence.
2. Soient f, g deux séries entières de rayons de convergence $R(f)$ et $R(g)$. Montrer que $R(f+g) \geq \min\{R(f), R(g)\}$.
3. Existe-t-il des séries entières f, g telles que les rayons de convergence de f et g soient 0, mais celui de $f + g$ est 1, respectivement $+\infty$?

Exercice 25

Soit Γ_r le cercle de centre 0 et de rayon r parcouru dans le sens direct. Soit f une fonction holomorphe sur un disque ouvert contenant le cercle de centre zéro et de rayon r. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\oint_{\Gamma_r} f(z)dz$,
2. $\displaystyle\oint_{\Gamma_r} \overline{f(z)}dz$, et
3. $\displaystyle\oint_{\Gamma_r} f(\overline{z})dz$.

Exercice 26

Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ une série entière qui converge pour $|z| < 1$. On pose $m(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$, pour $0 \leq r < 1$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$ pour $0 \leq r < 1$.
2. Si de plus f est bornée dans $\mathbb{D}$, montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ et

$$m(r) = o\left(\frac{1}{\sqrt{1-r}}\right) \quad \text{quand } r \to 1^-.$$

TD 5 : Principe du maximum et théorème des zéros isolés

Exercice 27

1. Déterminer l'ensemble des fonctions f holomorphes sur le disque unité $\mathbb{D}$ telles que
$$f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n},$$
pour tout entier $n \geq 2$.
2. Que se passe-t-il si on remplace $\mathbb{D}$ par $\mathbb{D}^*$ dans la question précédente ?

Exercice 28

1. Déterminer toutes les fonctions f holomorphes sur $\mathbb{C}$ telles que $f(z+1) = f(z+i) = f(z)$, pour tout $z \in \mathbb{C}$.
2. Déterminer toutes les fonctions qui sont à la fois Lipschitziennes et holomorphes sur $\mathbb{C}$.

Exercice 29

Soit f une fonction entière non nulle, et $M(r) =: \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Montrer que f est un polynôme si, et seulement si, il existe $C \geq 0$ tel que
$$\frac{\log M(r)}{\log r} \leq C, \tag{6}$$
pour tout $r \geq 2$. Calculer dans ce cas le degré du polynôme.

Exercice 30

1. Existe-t-il une fonction f holomorphe sur le disque unité telle que
$$f(\frac{1}{2n}) = f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n},$$
pour tout entier $n \geq 2$?
2. Soit Ω un ouvert qui contient 0, et soit f une fonction holomorphe sur Ω telle que
$$f(\frac{1}{n}) + f''(\frac{1}{n}) = 0,$$
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} \in \Omega$. Déterminer f, et montrer qu'il existe une unique fonction entière g telle que $g|_\Omega = f$.

Exercice 31

1. *(Lemme de Schwarz)* Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$. Montrer que $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.
Indication : considérer la fonction $g : z \mapsto \frac{f(z)}{z}$*, étendue par continuité en* 0.
2. Sous les hypothèses de la question précédente, on suppose qu'il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$. Que peut-on dire sur f ?
3. Déterminer toutes les fonctions holomorphes $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ telles que $f(0) = 0$ et $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

Exercice 32

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P_1, \ldots, P_n$ des points du plan. Soit M un point du plan et f la fonction définie par le produit des distances

$$f(M) =: \prod_{j=1}^{n} MP_j.$$

Montrer que les seuls extrema locaux de la fonction f sont les points P_j, pour $j \in \mathbb{N}$.

TD 6 : Développement en séries de Laurent et formule des résidus

Exercice 33

Soit $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2} + \dfrac{2}{z-2i}$.

1. Donner le développement en série entière de f en 0. Quel est le rayon de convergence ?
2. Déterminer le résidu de f au point $2i$, puis au point 1.
3. Déterminer le développement en série de Laurent de f sur la couronne $1 < |z| < 2$.

Exercice 34

1. Soit $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{(z-2)^3}$. Déterminer le résidu de f en 2.
2. Soit $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2+4}$. Déterminer le résidu de f en $2i$, puis donner le développement en série de Laurent de f au point $2i$.
3. Soit $f(z) = \dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z+i)(z-i)}$. Déterminer le résidu de f en i, puis donner le développement en série de Laurent de f dans la couronne $1 < |z| < 2$.

Exercice 35

Déterminer les singularités isolées des fonctions suivantes, et calculer les résidus en chacune de ces singularités.

1. $f(z) = \dfrac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$,
2. $g(z) = \exp(-\dfrac{1}{z^4})$

Exercice 36

Calculer les intégrales suivantes (tous les cercles sont parcourus dans le sens direct) :

1. $\displaystyle\oint_{|z-1|=1} \frac{z}{z^4-1}dz$,
2. $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z(z-1)^3}$,
3. $\displaystyle\oint_{|z-i|=2} \frac{\sin z}{(z-i)^4}dz$,
4. $\displaystyle\oint_{|z|=2} z^2 \exp(\frac{z+1}{z-1})dz$.

Exercice 37

En intégrant le long de la frontière du domaine $D_R =: \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z| < R, 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}\}$, montrer que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n}(\sin(\frac{\pi}{n}))^{-1}.$$

Exercice 38

Calculer les intégrales suivantes à l'aide du théorème des résidus :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$.
2. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{5x+2}{3x^2-x+1}dx$, pour $a \in \mathbb{R}$,
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(3x^2+2x+1)^2}dx$
4. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos x}{5+\cos x}dx$,

Exercice 39

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{e^z + e^{\frac{1}{z}}}{z(z-1)}dz$.

TD 7 : Révisions

Questions tirées d'examens d'Analyse Complexe passés.

1. Calculer, à l'aide du théorème des résidus
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(z-1)^2}dz,$$
où γ est le chemin donné par $\gamma(t) = 4\cos t + 5i\sin t$, avec $t \in [0, 2\pi]$.
2. Soit $a \in \mathbb{C}$ et γ le chemin donné par $\gamma(t) = e^{it}$, pour $0 \leq t \leq 2\pi$. Montrer que
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{a^n e^{az}}{n! z^{n+1}}dz = \left(\frac{a^n}{n!}\right)^2.$$
3. Montrer que la fonction $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(nz)}{2^n}$ est holomorphe sur $D = \{x + iy \in \mathbb{C}, |y| < \ln 2\}$.
4. Soit f une fonction analytique dans le disque $|z| < R$. On suppose qu'il existe un $M > 0$ tel que $|f'(z)| \leq M$, pour tout $|z| < R$. Si $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est le développement en série entière de f, démontrer que l'on a
$$|a_n| \leq \frac{M}{nR^{n-1}}.$$
5. Existe-t-il une fonction entière f telle que $f(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n+1}) = e^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?
6. Calculer
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos t + \sqrt{5}}. \tag{8}$$