TD 1 : Nombres complexes

Exercice 1

Écrire les nombres complexes suivants sous forme polaire :

1. $z_1 = \left(\dfrac{1+3i}{1-2i}\right)^{15}$
2. $z_2 = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^{51}$
3. $z_3 = 1 - e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi[$

Solution:

1. On multiplie le dénominateur par son conjugué pour se débarasser des nombres complexes au dénominateur :
$$\frac{1+3i}{1-2i} = \frac{(1+2i)(1+3i)}{|1+2i|^2} = -1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}.$$
Donc $z_1 = (\sqrt{2})^{15} e^{\frac{45i\pi}{4}} = (\sqrt{2})^{15} e^{\frac{5i\pi}{4}}$.
2. On calcule $|1 - i\sqrt{3}| = 2$, puis
$$1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$
Donc $z_2 = -2^{51}$.
3. Il s'agit d'une manipulation classique qu'il faut savoir identifier :
$$1 - e^{i\theta} = \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta+3\pi}{2}}.$$

Exercice 2

Résoudre les équations et inégalités suivantes :

1. $z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0$
2. $z^3 + \overline{z} = 0$
3. $\left|\dfrac{z-i}{z+2}\right| < 2$
4. $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z+i}{z-1}\right) > 1$

Solution:

1. On écrit $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. En séparant parties réelle et imaginaire, on obtient le système d'équation suivant :
$$\begin{cases} 0 = (a-1)^2 - b^2 \\ 0 = 2b(a+1). \end{cases}$$
On résout en distinguant les cas $b = 0$ (alors $a = 1$ par la première équation) et $a = -1$ (alors $b = \pm 2$). Les solutions sont donc 1, $-1 + 2i$ et $-1 - 2i$ (notez qu'il ne s'agit pas d'un polynôme à cause de la présence de $\overline{z}$).
2. On écrit z^3 et $-\overline{z}$ en coordonnées polaires ; l'équation devient $r^3 e^{3i\theta} = re^{-i(\theta+\pi)}$, soit :
$$\begin{cases} r^3 = r \\ 3\theta = -\theta + \pi[2\pi]. \end{cases}$$
Les solutions sont 0 et l'ensemble $\{e^{i\theta}, \theta = \frac{\pi}{4}[\frac{\pi}{2}]\}$.
3. On écrit $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. L'équation équivaut à
$$x^2 + (y-1)^2 < 4\left((x+2)^2 + y^2\right).$$
Après manipulation, on obtient
$$\left(x + \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 > \frac{20}{9}.$$
L'ensemble des solutions est constitué des points en dehors (strictement) du disque de centre $\frac{1}{3}(8+i)$ et de rayon $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.
4. On écrit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. En multipliant l'équation par le complexe conjugué, l'équation est équivalente à
$$\begin{aligned} &\operatorname{Im}\left((x-1-iy)(x+i(y+1))\right) > (x-1)^2 + y^2 \\ \iff &(x-1)(y+1) - xy > (x-1)^2 + y^2. \end{aligned}$$
Après factorisation, on obtient l'inéquation
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{2}.$$
L'ensemble des solutions est donc constitué des points en dehors (strictement) du disque de centre $\frac{1}{2}(3-i)$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 3

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ et
$$\Delta = \{t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_3\,;\, t_1, t_2, t_3 > 0\,, t_1 + t_2 + t_3 = 1\}$$

1. Esquisser Δ
2. Montrer qu'il existe une constante $K > 1$ telle que
$$|1 - z| \leq K(1 - |z|) \quad \text{pour tout } z \in \Delta\,.$$

Solution:

Exercice 4

On considère la transformation complexe $f : z \mapsto 5z^4$. Déterminer les points du plan qui sont envoyés par f sur :

1. la droite réelle ;
2. la droite des imaginaires purs.

Solution:

1. On résout en polaire, en prenant $z = re^{i\theta}$. L'équation s'écrit alors $4\theta \equiv 0[\pi]$, donc $\theta \equiv 0[\frac{\pi}{4}]$: il s'agit des droites $\mathbb{R}$, $i\mathbb{R}$, ainsi que celles d'équation $y = x$ et $y = -x$.
2. L'équation s'écrit cette fois $4\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, donc $\theta \equiv \frac{\pi}{8}[\frac{\pi}{4}]$.

Exercice 5

On considère la transformation complexe $f : z \mapsto z^4 + \overline{z}z^3$. Déterminer les points du plans qui sont envoyés par f sur la droite $i\mathbb{R}$.

Solution: On a $f(z) = z^2(|z|^2 + z^2)$, soit sous forme polaire :

$$f(z) = r^4 e^{2i\theta}(1 + e^{2i\theta}) = 2r^4 e^{3i\theta}\cos(\theta).$$

Sous cette forme, $f(z) \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $3\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, soit $\theta \equiv \frac{\pi}{6}[\frac{\pi}{3}]$.

Exercice 6

Soit $a \in \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$. On considère la transformation homographique f_a définie pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1/\overline{a}\}$ par

$$f_a(z) = \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}.$$

1. Montrer que f_a est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{1/\overline{a}\}$ sur son image (à déterminer).
2. Montrer que f_a est une bijection de $\mathbb{D}$ dans lui-même (*Indication : commencer par montrer que si $z \in [0, 1[$, alors $f_a(z) \in \mathbb{D}$*).
3. Quelle est l'image de $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ par f_a ?

Solution:

1. Trouver l'antécédent éventuel d'un point $w \in \mathbb{C}$ revient à résoudre l'équation $f_a(z) = w$. Après calcul (rapide), on trouve que cette équation admet une unique solution pour tout $w \neq 1/\overline{a}$, et qu'alors $z = f_a(w)$. Autrement dit f_a est son propre inverse (c'est une involution).
2. D'après le résultat de la question précédente, il suffit de montrer que $|f_a(z)| < 1$ si $|z| < 1$: alors tout point $w \in \mathbb{D}$ admettra l'unique antécédent $f_a(w)$, également dans $\mathbb{D}$.

   Si $|z| < 1$, on veut donc montrer que $\left|\frac{a-z}{1-\overline{a}z}\right| < 1$. Le problème est un peu difficile à attaquer frontalement, mais on peut se ramener au cas $z \in \mathbb{R}$ par l'observation suivante : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{D}$, on a $f_a(e^{i\theta}z) = e^{i\theta} f_{e^{-i\theta}a}(z)$. Donc, si pour tout $r \in [0, 1[$ et pour tout $a \in \mathbb{D}$ on a $|f_a(r)| < 1$, alors

   $$|f_a(re^{i\theta})| = \left|e^{i\theta} f_{e^{-i\theta}a}(r)\right| < 1,$$

   ce qui est précisément ce que l'on veut.

   Soit donc $r \in \mathbb{R}$. On souhaite montrer que $\left|\frac{a-r}{1-\overline{a}r}\right| < 1$, ce qui équivaut à

   $$\frac{(a - r)(\overline{a} - r)}{(1 - ra)(1 - r\overline{a})} < 1.$$

Après simplification, on trouve $r^2(1+|a|^2) < 1+|a|^2$, qui est toujours vérifié pour $r<1$.

3. Le cas de l'égalité dans l'inéquation ci-dessus donne $|f_a(z)| = 1$ si et seulement si $|z| = 1$. L'application f_a est donc aussi une bijection du cercle unité sur lui-même.

Exercice 7

Soient $(a_j, b_j)_{j\in\{1\dots n\}} \subset \mathbb{D}\times\mathbb{D}$. Montrer que

$$\left|\prod_{j=1}^n a_j - \prod_{j=1}^n b_j\right| \leq \sum_{j=1}^n |a_j - b_j|.$$

Solution: On procède par récurrence : l'inégalité est bien sûr vérifiée pour $n=1$. Puis, en supposant qu'elle soit vérifiée au rang n, on écrit :

$$\begin{aligned}\left|a_{n+1}\prod_{j=1}^n a_j - b_{n+1}\prod_{j=1}^n b_j\right| &= \left|(a_{n+1}-b_{n+1})\prod_{j=1}^n a_j + b_{n+1}\left(\prod_{j=1}^n a_j - \prod_{j=1}^n b_j\right)\right| \\ &\leq |a_{n+1}-b_{n+1}| + \left|\prod_{j=1}^n a_j - \prod_{j=1}^n b_j\right|\end{aligned}$$

où l'on a majoré la norme du produit de gauche et celle de b_{n+1} par 1. On conclut par récurrence.

Exercice 8

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes tels que $a_n \neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. On suppose que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ converge vers $l \geq 0$. Montrer que $|a_n|^{\frac{1}{n}} \to l$.
2. Montrer qu'en général (sans l'hypothèse de la question précédente), on a :

$$\liminf\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

3. Déterminer $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

Solution:

1. Utiliser Césaro
2. Il faut relier $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ et $|a_n|^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln|a_n|\right)$. Pour ça, l'observation essentielle est d'écrire, pour $n>N$:

$$\ln|a_n| - \ln|a_N| = \sum_{k=N}^{n-1}\ln\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|.$$

Maintenant, soit $l\geq 0$ tel que $\liminf\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > l$. Par définition, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $k\geq N$ on ait $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > l$. Donc pour $n>N$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\left(\ln|a_n| - \ln|a_0|\right) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \\ &> \frac{R}{n} + \frac{n-N}{n}\ln l\end{aligned}$$

avec $R \in \mathbb{R}$ (la somme des $N-1$ premiers termes). Le côté droit de l'inégalité tend vers $\ln l$ quand n tend vers $+\infty$. De plus $\frac{1}{n} \ln |a_0| \to 0$ quand $n \to +\infty$. On en déduit que pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\frac{1}{n} \ln |a_n| > \ln l - \epsilon$$

pour n suffisamment grand. Par conséquent, $|a_n|^{\frac{1}{n}} > le^{-\epsilon}$ pour n grand. Ceci étant vrai pour tout ϵ, on en déduit $\liminf |a_n|^{\frac{1}{n}} \geq l$; ceci étant à nouveau vrai pour tout $l \leq \liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, on en déduit l'inégalité de gauche. L'inégalité de droite s'obtient avec le même raisonnement (celle du milieu est vraie par définition).

3. On applique les résultats précédents à $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Alors

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right).$$

Un développement limité du logarithme montre que le terme de droite tend vers e, qui est donc la limite recherchée.

TD 2 : Fonctions holomorphes

Exercice 9

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. On suppose que f est de classe C^2 comme fonction sur $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'alors $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des fonctions harmoniques.

NB : on dit qu'une fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est harmonique si son Laplacien est nul, c'est-à-dire si* $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

Solution: Posons $f = u + iv$. On écrit les équations de Cauchy-Riemann : $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Donc :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

On a utilisé le fait que f soit de classe C^2 pour intervertir les dérivées selon x et y. $\square$

Exercice 10

Déterminer tous les points de $\mathbb{C}$ en lesquel les fonctions suivantes sont holomorphes :

1. $f(x, y) = y^2 \sin x + iy$
2. $g(x, y) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$
3. $h(x, y) = x^4y^5 + ixy^3$

Solution: Toutes les fonctions impliquées ici sont de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elles sont donc holomorphes en $z = x + iy$ si et seulement si elles vérifient les équations de Cauchy-Riemann en (x, y).

1. On écrit les équations de Cauchy-Riemann pour $f = u + iv$:

$$\begin{cases} y^2 \cos x = 1 \\ 2y \sin(x) = 0 \end{cases}$$

La première ligne mpose $y \neq 0$, donc $\sin(x) = 0$ et $\cos(x) = y^{-2}$. La première équation implique $x \equiv 0[\pi]$, tandis que la seconde impose $\cos(x) > 0$. L'ensemble des points en lesquels f est holomorphe est donc

$$\mathbb{R} \cup \{2k\pi \pm i, k \in \mathbb{Z}\}$$

2. En écrivant $z = x + iy$, on remarque que $g(x, y) = z^3$, qui est holomorphe sur tout $\mathbb{C}$ (on peut aussi écrire les équations de Cauchy-Riemann et voir qu'elles sont trivialement vraie partout).
3. On note $h = u + iv$. Si h est holomorphe en $x + iy$, alors $\Delta v(x, y) = 0$. Cela donne la condition nécessaire $xy = 0$. On écrit ensuite les équations de Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} 4x^3y^5 = 3xy^2 \\ 5x^4y^4 = -y^3 \end{cases}$$

Si h est holomorphe en $x + iy$ avec $x = 0$, alors la deuxième ligne implique $y = 0$. Si $x \neq 0$, alors d'après la condition $xy = 0$ on a $y = 0$, qui est également une solution des équations. La fonction h n'est donc holomorphe que sur la droite réelle $y = 0$.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. Montrer que f admet des dérivées partielles selon x et y en 0 et y vérifie les équations de Cauchy-Riemann. La fonction f est-elle holomorphe en 0 ?

Solution: On calcule $\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$, donc f est dérivable selon x en 0 et $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 0$. De même $\frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0$. Par conséquent $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(0) = 0$, autrement dit f vérifie les équations de Cauchy- Riemann en 0. Cependant f n'est pas $\mathbb{C}$-différentiable en 0 : en effet, soit $h = \epsilon(1+i)$. Alors $\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \frac{1}{1+i}$ qui est différent de $\frac{\partial f}{\partial x}$: autrement dit le taux d'accroissement de f en 0 n'a pas de limite quand h tend vers 0 dans $\mathbb{C}$. Cet argument prouve en fait que f n'est pas différentiable en 0 : vérifier les équations de Cauchy-Riemann n'implique donc pas d'être holomorphe.

Exercice 12

Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont $\mathbb{R}$-différentiables.

1. Montrer que :
   (a) $\dfrac{\partial z}{\partial z} = 1$
   (b) $\dfrac{\partial z}{\partial \overline{z}} = 0$
   (c) $\dfrac{\partial \overline{z}}{\partial z} = 0$
   (d) $\dfrac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} = 1$
2. Montrer que si f est une fonction $\mathbb{R}$-différentiable sur $\mathbb{C}$:
$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}$$
3. Montrer que les dérivées de Wirtinger vérifient la règle du produit :
$$\frac{\partial}{\partial z}(fg) = f\frac{\partial g}{\partial z} + g\frac{\partial f}{\partial z} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(fg) = f\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} + g\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$$
avec g une autre fonction $\mathbb{R}$-différentiable sur $\mathbb{C}$.
4. Montrer la règle de la chaîne :
$$\frac{\partial}{\partial z}(f\circ g) = \frac{\partial g}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\circ g\right) + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\circ g\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f\circ g) = \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\circ g\right) + \frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\circ g\right)$$
5. Montrer que si f est holomorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors $g : z \mapsto f(\overline{z})$ est « anti-holomorphe »sur Ω, c'est-à-dire $\frac{\partial g}{\partial z} = 0$. Montrer que de plus $\frac{\partial g}{d\overline{z}}(z) = f'(\overline{z})$.

Solution:

1. On calcule à partir des définitions $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$.
2. Cela vient encore des définitions, avec l'observation que $\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}$ (de même pour la dérivée selon y).
3. Cela provient du fait que $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ vérifient la règle du produit.
4. Si l'on voit f et g comme des fonctions sur $\mathbb{R}^2$, alors $g(x,y) = f(x,-y)$. On en déduit $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,-y)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x,-y)$. le résultat suis directement avec les définitions des opérateurs $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$.

Exercice 13

Déterminer (pas forcément dans cet ordre) tous les points en lesquels les fonctions suivantes sont $\mathbb{R}$-différentiables, puis holomorphes, et calculer les dérivées complexes éventuelles.

1. $f(z) = (|z|^2 - 1)e^{\overline{z}}$,
2. $g(z) = \exp\left(-\frac{1}{z^4}\right)$ si $z \neq 0$ et $g(0) = 0$,
3. $h(z) = \overline{z}^4(1 - |z|^5)$,
4. $k^*(z) = \overline{k(\overline{z})}$, avec k holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Solution:

1. On utilise les propriétés des dérivées de Wirtinger établies dans l'exercice précédent pour montrer que
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = e^{\overline{z}}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(|z|^2 - 1) + (|z|^2 - 1)\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(e^{\overline{z}}) = e^{\overline{z}}(\overline{z} + |z|^2 - 1)$$
où l'on a utilisé $|z|^2 = z\overline{z}$. Ici f est de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ (produit d'un polynôme et d'une exponentielle), elle est donc holomorphe en z si et seulemnet si $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = 0$. On résout donc l'équation
$$\overline{z} + |z|^2 - 1 = 0.$$
En prenant la partie imaginaire de l'équation, on trouve $\mathrm{Im}(z) = 0$. Les solutions sont donc les racines (réelles) du polynôme $X^2 + X - 1$, soit $z_\pm = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Par conséquent f est holomorphe en z_+ et z_- uniquement, et la dérivée se calcule également à partir des règles de l'exercice précédent :
$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = e^{\overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}(|z|^2 - 1) + (|z|^2 - 1)\frac{\partial}{\partial z}(e^{\overline{z}}) = \overline{z}e^{\overline{z}}.$$
2. La fonction exp est holomorphe sur tout $\mathbb{C}$ et $z \mapsto z^4$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Par conséquent g est au moins holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, et la dérivée peut-être calculée par la règle de la chaîne : $g'(z) = -\frac{4}{z^3}\exp(-\frac{1}{z^4})$.
Calculons la limite du taux d'accroissement en zéro, en marquant $z = re^{i\theta}$. On obtient :
$$|\frac{g(z)}{z}| = |\frac{\exp(-r^{-4}e^{-4i\theta})}{re^{i\theta}}| = \frac{\exp(-r^{-4}\cos(4\theta))}{r}.$$
Si on choisit $\theta = 0$, alors $\cos(\theta) = 1$ et par croissance comparée l'expression ci-dessus tend vers 0 quand r tend vers 0. Mais si on prend $\theta = \frac{\pi}{8}$, alors $\cos(\theta) = 0$ et $|\frac{g(z)}{z}| \to +\infty$ quand $r \to 0$. Le taux d'accroissement n'a donc pas de limite en 0 dans $\mathbb{C}$.
Remarque : on aurait pu calculer les dérivées partielles de g selon x et y en 0 : elles sont toutes les deux nulles, donc g vérifie les équations de Cauchy-Riemann en 0. Mais le même argument que ci-dessus peut-être utilisé pour montrer que g n'est pas différentiable en 0, donc a fortiori pas holomorphe.
3. On commence par calculer $\frac{\partial |z|^5}{\partial \overline{z}}$. Pour tout $n > 1$, la fonction $g_n : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}$ est dérivable sur tout $\mathbb{R}^2$, et ses dérivées partielles sont :
$$\frac{\partial g_n}{\partial x}(x, y) = nx(x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}-1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g_n}{\partial y}(x, y) = ny(x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}-1}.$$
Donc $\frac{\partial |z|^n}{\partial z}(z) = \frac{n}{2}\overline{z}|z|^{n-2}$ et $\frac{\partial |z|^n}{\partial z}(\overline{z}) = \frac{n}{2}z|z|^{n-2}$. Qui plus est, toujours si $n > 1$, alors ce calcul montre que $z \mapsto |z|^n$ est de classe C^1 comme fonction sur $\mathbb{R}^2$.
La fonction h est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, il suffit donc de chercher les points d'annulation de $\frac{\partial h}{\partial \overline{z}}$. On calcule :
$$\frac{\partial h}{\partial \overline{z}} = 4\overline{z}^3(1 - |z|^5) + \frac{5}{2}\overline{z}^4 z|z|^3 = \overline{z}^3(1 + \frac{5}{2}|z|^4 - |z|^5).$$
La fonction h est donc holomorphe en 0 et sur les cercles éventuels constitués par les $z \in \mathbb{C}$ dont le module est racine du polynôme $1 + \frac{5}{2}X^4 - X^5$. On vérifie par une étude de signe que ce

polynôme a une unique racine réelle α qui vérifie $\alpha > \frac{3}{2}$. Les points où f est holomorphe sont donc 0 et le cercle de centre 0 et de rayon α. En ces points, on a :

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{5}{2}\overline{z}^5|z|^3.$$

4. D'après la dernière question de l'exercice précédent, on sait que la fonction $l : z \mapsto k(\overline{z})$ est anti-holomorphe, c'est-à-dire $\frac{\partial l}{\partial z} = 0$. Or, d'après la question 2 du même exercice, on a $\frac{\partial k^*}{\partial \overline{z}} = \overline{\frac{\partial l}{\partial z}} = 0$. Autrement dit, k^* vérifie les équations de Cauchy-Riemann en tout point. Comme k^* est différentiable partout (comme composée de fonctions différentiables), on en déduit que k^* est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Exercice 14

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$. Montrer que sous chacune des conditions suivantes, f est constante sur Ω :

1. $\operatorname{Im} f$ est une fonction constante,
2. $\operatorname{Arg} f$ est une fonction constante (en supposant que f ne s'annule pas dans Ω),
3. $|f|$ est une fonction constante,
4. $(\operatorname{Im}(f))^2 - \operatorname{Re} f$ est une fonction constante.

Solution: Moralement, vous verrez dans le cours que si f est holomorphe et non constante, alors l'image de f est un ouvert. Or chaque question de l'exercice implique que l'image de f soit contenue dans un sous-ensemble fermé de $\mathbb{C}$ (une droite horizontale, un cercle, une parabole) : par conséquent f doit être constante.

Comme nous n'avons pas encore ce théorème à notre disposition, nous allons nous contenter d'utiliser les équations de Cauchy-Riemann. Écrivons donc $f = u + iv$.

1. Si v est constante, alors $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ sur Ω. Comme f est holomorphe, elle vérifie les équations de Cauchy-Riemann, donc $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$: ceci implique que u est constante sur Ω (donc aussi f).
2. L'énoncé signifie que l'image de f est contenue dans la droite d'argument $\theta =: \operatorname{Arg} f$. On considère la fonction $g : z \mapsto f(z)e^{-\theta}$. Cette fonction g est holomorphe, et son image est contenue dans la droite $\operatorname{Arg}(z) = 0$: autrement dit, g est de partie imaginaire constante. D'après la question précédente, g est constante, donc f aussi.
3. La fonction $|f|^2 = u^2 + v^2$ est constante. Plutôt que de dériver, on applique le Laplacien pour trouver
$$0 = \Delta(u^2 + v^2) = (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2 + u\Delta u + v\Delta v.$$
Mais $\Delta u = \Delta v = 0$ d'après l'exercice . Il ne reste qu'une somme de carrés, dont chaque terme doit être égal à 0. Par conséquent u et v sont constantes sur Ω.
4. On dérive la fonction $v^2 - u$ pour trouver le système d'équation :
$$\begin{cases} 2v\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ 2v\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad \text{qui équivaut à} \qquad \begin{cases} 2v\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ 2v\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$
par Cauchy-Riemann. On multiplie la seconde ligne par $2v$ pour la soustraire à la première ; on multiplie également la première par $2v$ pour l'ajouter à la seconde et obtenir le système
$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x}(4v^2 + 1) = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(4v^2 + 1) = 0. \end{cases}$$

Comme $4v^2 + 1 > 0$ partout, on en déduit que les dérivées partielles de v sont nulles, donc que v est constante sur Ω ; les équations de Cauchy-Riemann impliquent que u (donc f) est constante.

TD 3 : Intégrales de contour

Exercice 15

Soit γ le chemin déterminé par la frontière du domaine $\{z \in \mathbb{C}, 1 < |z| < 2, \mathrm{Im}(z) > 0\}$, parcourue dans le sens direct. Calculer l'intégrale $\int_\gamma \frac{\overline{z}}{z} dz$.

Solution: On découpe le contour en quatre chemins facile à paramétrer, ce qui donne pour l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{\overline{z}}{z} dz &= \int_1^2 \frac{x}{x} dx + \int_0^\pi \frac{2e^{-it}}{2e^{it}} 2ie^{it} dt + \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x} dx + \int_\pi^0 \frac{e^{-it}}{e^{it}} ie^{it} dt \\ &= 1 + 4 + 1 - 2 \\ &= 4.\end{aligned}$$

Exercice 16

1. Soit $S_\alpha = \{z \in \mathbb{C}, 0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \alpha\}$, avec $0 < \alpha \leq 2\pi$. Soit $f : S_\alpha \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable avec $\lim_{z\to\infty, z\in S} zf(z) = A$. Montrer qu'alors
$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} f(z)dz = i\alpha A,$$
où γ_r est l'arc du cercle $|z| = r$ contenu dans S_α (parcouru dans le sens direct).
2. Soit f une fonction mesurable sur le demi-plan supérieur $H = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$. Supposons que $\lim_{z\to\infty, z\in H} f(z) = 0$. Soit $\gamma_r = \{z \in H, |z| = r\}$ (parcouru dans le sens direct) et $m > 0$. Montrer que
$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} e^{imz} f(z)dz = 0.$$

Solution:

1. On écrit :
$$\int_{\gamma_r} f(z)dz - i\alpha A = \int_0^\alpha ire^{it} f(re^{it})dt - \int_0^\alpha iAdt.$$
Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $R > 0$ tel que pour tout $z \in S_\alpha$ avec $|z| > R$, on a $|zf(z) - A| < \epsilon$. Donc pour $r > R$:
$$|\int_{\gamma_r} f(z)dz - i\alpha A| \leq \int_0^\alpha |re^{it} f(re^{it}) - A| < \alpha\epsilon,$$
ce qui prouve que $\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)dz = i\alpha A$.

2. Notez que le facteur oscillant $z \mapsto e^{imz}$ est essentiel pour la convergence de l'intégrale. Si $m = 0$, l'intégrale pourrait tendre vers n'importe quoi (par exemple, si $m = 0$ et $f(z) = \frac{1}{\sqrt{|z|}}$, l'intégrale tend vers $-\infty$).
   Écrivons
$$\int_{\gamma_r} e^{imz} f(z)dz = \int_0^{\pi} e^{imre^{it}} f(re^{it}) ire^{it} dt,$$
   donc
$$|\int_{\gamma_r} e^{imz} f(z)dz| \leq \int_0^{\pi} |re^{-mr\sin t} f(re^{it})| dt.$$
   Soit $\epsilon > 0$. Il existe $R > 0$ tel que pour tout $z \in H$ avec $|z| > R$, on a $|f(z)| < \epsilon$. Donc, pour $r > R$:
$$|\int_{\gamma_r} e^{imz} f(z)dz| \leq \epsilon \int_0^{\pi} re^{-mr\sin t} dt = 2\epsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} re^{-mr\sin t} dt,$$
   la dernière égalité venant de la symétrie du sinus par rapport à $\frac{\pi}{2}$ sur $[0, \pi]$. On applique alors une inégalité de convexité : pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin t > \frac{2t}{\pi}$. Donc :
$$\begin{aligned} |\int_{\gamma_r} e^{imz} f(z)dz| &\leq 2\epsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\exp(-\frac{2mrt}{\pi}) dt \\ &= 2\epsilon [-\frac{\pi}{2m} \exp(-\frac{2mrt}{\pi})]_0^{\frac{\pi}{2}}, \end{aligned}$$
   et le terme entre crochets tend vers $\frac{\pi}{2m}$ quand r tend vers l'infini. On a donc montré que pour tout $\epsilon > 0$, on peut choisir R assez grand pour que $|\int_{\gamma_r} e^{imz} f(z)dz| \leq \epsilon$ pour tout $r > R$; ceci prouve le résultat demandé.

Exercice 17

Montrer que
$$\int_0^{\infty} \cos(x^2)dx = \int_0^{\infty} \sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$
Pour cela, on intègrera la fonction $z \mapsto e^{iz^2}$ le long du chemin déterminé par la frontière du secteur $0 \leq |z| \leq R$, $0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{4}$.

Solution: Soit γ_R le chemin décrit par l'énoncé. Comme $z \to e^{iz^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, on a d'après le théorème de Cauchy :
$$0 = \oint_{\gamma_R} e^{iz^2} dz = \underbrace{\int_0^R e^{ix^2} dx}_{I_1(R)} + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp(iR^2 e^{2it}) iRe^{it} dt}_{I_2(R)} - \underbrace{\int_0^R e^{-r^2} e^{i\frac{\pi}{4}} dr}_{I_3(R)}.$$
La première intégrale est
$$I_1(R) = \int_0^R \cos(x^2)dx + i\int_0^R \sin(x^2)dx$$
et sa limite quand $R \to \infty$ (si elle existe) devrait donner les intégrales recherchées. Comme $I_3(R)$ tend vers $e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr = \frac{1+i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, il ne reste qu'à montrer que $I_2(R)$ tend vers 0 quand R tend vers l'infini. Or $|\exp(iR^2 e^{2it})| = \exp(-R^2 \sin(2t))$, donc :
$$|I_2(R)| \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} R\exp(-R^2 \sin(2t))dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R\exp(-R^2 \sin t)dt.$$

Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, le sinus est une fonction convexe, qui est donc au-dessus de ses cordes. En particulier, on a $\sin(t) \geq \frac{2t}{\pi}$ sur cet intervalle. Donc

$$|I_2(R)| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} R\exp(-\frac{2R^3t}{\pi})dt = [\frac{\pi}{2R}\exp(-\frac{2R^2t}{\pi})]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

qui tend vers 0 quand $R \to \infty$. Cela prouve que $I_1(R)$ converge quand R tend vers $+\infty$, avec l'égalité demandée $\lim_{R\to\infty} I_1(R) = \frac{1+i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 18

D'après le théorème de Weierstrass, toute fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$ est la limite uniforme de polynômes à coefficients complexes. Est-ce que toute fonction continue sur le disque unité fermé peut-être approchée de manière uniforme par des polynômes de la variable $z \in \mathbb{C}$?

Solution: La réponse est non, pour la raison suivante. Soit $\overline{\mathbb{D}}$ le disque unité fermé et $f \in C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$. Admettons qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients complexe qui converge uniformément vers f. Puisque chaque P_n est une fonction entière, on a

$$\oint_\gamma P_n(z)dz = 0,$$

avec γ le contour donné par la frontière de $\overline{\mathbb{D}}$, orienté dans le sens direct. La convergence uniforme implique que $\oint_\gamma f = 0$.

Il suffit donc de trouver une fonction $g \in C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$ telle que $\oint_\gamma g \neq 0$ pour montrer que g ne peut pas être limite uniforme de polynômes. Prenons par exemple la fonction $g : z \mapsto \overline{z}$: alors $\oint_\gamma g = 2\pi$.

L'argument va encore plus loin, puisqu'on verra bientôt dans le cours que toute limite uniforme de fonctions holomorphes est également holomorphe.

Exercice 19

Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\xi}e^{-\pi x^2}dx = e^{-\pi\xi^2}$.

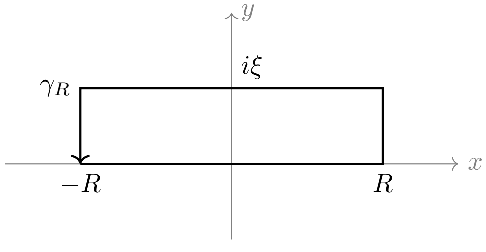
Solution: La convergence de l'intégrale est directe car $x \mapsto e^{-\pi x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On commence alors par factoriser le terme dans l'exponentielle :

$$e^{-2i\pi x\xi}e^{-\pi x^2} = e^{-\pi((x+i\xi)^2+\xi^2)}$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\xi}e^{-\pi x^2}dx = e^{-\pi\xi^2}\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x+i\xi)^2}dx.$$

Pour évaluer l'intégrale de droite, on intègre la fonction $f : z \mapsto e^{-\pi z^2}$ sur le contour γ_R représenté ci-dessous :



Comme f est une fonction entière, on a

$$0 = \oint_{\gamma_R} f = \underbrace{\int_{-R}^{R} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx}_{I_1(R)} + \underbrace{\int_{\xi}^{0} e^{-\pi(R+iy)^2} dy}_{I_2(R)} - \underbrace{\int_{-R}^{R} e^{-\pi x^2} dx}_{I_3(R)} + \underbrace{\int_{0}^{\xi} e^{-\pi(-R+iy)^2} dy}_{I_4(R)}.$$

L'intégrale $I_1(R)$ converge vers $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx$ quand R tend vers l'infini, tandis que $I_3(R)$ tend vers 1. Quant aux deux autres intégrales, on a $|e^{-\pi(R+iy)^2}| = e^{-\pi R^2} e^{\pi y^2}$ donc

$$|I_2(R)| \leq e^{-\pi R^2} \int_0^{\xi} e^{\pi y^2} dy.$$

La quantité de droite tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$, donc $I_2(R)$ aussi. Le même argument vaut pour $I_4(R)$. Finalement, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1,$$

d'où le résultat demandé.

Notez bien que le théorème du changement de variable tel que vous le connaissez ne s'applique que pour un difféomorphisme entre des ouverts de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{R}^n$) : en particulier, il ne serait pas possible de l'appliquer pour effectuer un changement de variable $z = x + i\xi$ dans l'intégrale.

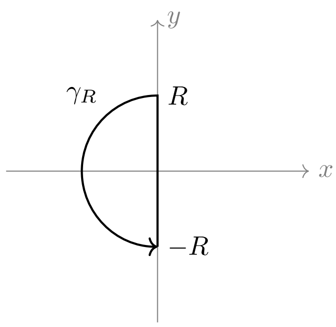
Exercice 20

Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} - 1}{2ix} dx$, puis en déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Solution: La fonction $f : z \mapsto \frac{e^z - 1}{2z}$ est entière ; en effet, on peut l'écrire comme une série entière qui converge sur tout $\mathbb{C}$:

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}.$$

On choisit d'intégrer sur le contour γ_R représenté ci-dessous, pour des raisons qui apparaîtront claires par la suite.



Alors :

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\gamma_R} f &= \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix} - 1}{2ix} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{e^{Re^{it}} - 1}{2Re^{it}} iRe^{it} dt \\ &= \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix} - 1}{2ix} dx + \frac{i}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{Re^{it}} dt - \frac{i\pi}{2}. \end{aligned}$$

Comme $|e^{Re^{it}}| = e^{R\cos t}$, on a

$$|\frac{i}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{Re^{it}}dt| \leq \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{R\cos t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\cos t}dt.$$

On s'est ramené au segment $[0, \frac{\pi}{2}]$, sur lequel $\cos t \geq 1 - \frac{2t}{\pi}$. Donc

$$|\frac{i}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{Re^{it}}dt| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R(1-\frac{2t}{\pi})}dt = \frac{\pi}{2R}(1 - e^{-R})$$

qui tend vers 0 quand R tend vers l'infini. On en déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} - 1}{2ix} = i\frac{\pi}{2}.$$

En prenant la partie imaginaire de cette égalité, on obtient $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$. Comme $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est une fonction paire, cette quantité est aussi égale à $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$.

Exercice 21

Soit Ω un ouvert simplement connexe et u une fonction réelle de classe C^2, harmonique sur Ω. Montrer qu'il existe une fonction f holomorphe sur Ω telle que $u = \operatorname{Re} f$.

Solution: On considère la fonction f sur $\mathbb{C}$, donnée par

$$f(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z).$$

Cette fonction est holomorphe sur Ω. En effet, elle est de classe C^1 donc différentiable partout, et elle vérifie les conditions de Cauchy-Riemann en tout point :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\operatorname{Re} f)}{\partial x} = \dfrac{\partial[}{\partial 2}]ux = -\dfrac{\partial[}{\partial 2}]uy = \dfrac{\partial(\operatorname{Im} f)}{\partial y} & \text{car } \Delta u = 0, \text{ et} \\ \dfrac{\partial(\operatorname{Im} f)}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x}y = \dfrac{\partial u}{\partial y}x = -\dfrac{\partial(\operatorname{Re} f)}{\partial y} & \text{car } u \text{ est } C^2. \end{cases}$$

Comme Ω est simplement connexe, f y admet une primitive, qu'on appelle F. Posons $v = \operatorname{Re} F$. Pour tout $z \in \Omega$, on a :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z) = F'(z) \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(z) = iF'(z)$$

donc

$$\frac{\partial v}{\partial x}(z) = \operatorname{Re} F'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial y}(z) = -\operatorname{Im} F'(z) = \frac{\partial u}{\partial y}(z).$$

En d'autres termes, la différentielle de la fonction $v - u$ est nulle. Par conséquent, il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $v = u + c$. La fonction $F - c$ a donc pour partie réelle u.

TD 4 : Séries entières

Exercice 22

1. *(Lemme de Césaro)* Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui converge vers l quand $n \to \infty$, avec $l \in [-\infty; +\infty]$. Montrer qu'alors
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_k \xrightarrow[n\to\infty]{} l.$$
2. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes avec $b_n \neq 0$ pour tout n. On suppose que $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|$ converge vers une limite $l \in [0; \infty]$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} |b_n|^{\frac{1}{n}} = l$.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$.

Solution:

1. Il s'agit d'un exercice classique de découpage de somme. On suppose pour commencer que $l \in]-\infty; +\infty[$ (les cas $l = \pm\infty$ se traitent de la même façon et sont laissés en exercice). Soit $\varepsilon > 0$. Par définition, puisque (a_n) converge vers l, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n > N$, on ait $|a_n - l| < \varepsilon$.
   On découpe alors la suite selon N : pour tout $n > N$, on a
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N} a_k + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} a_k. \tag{1}$$
   On souhaite majorer $|\frac{1}{n}(\sum_{k=0}^{n} a_k) - l|$. Si N est fixé, le premier terme dans l'équation (**??**) tend vers 0 quand n tend vers l'infini. En particulier, il est inférieur à ε à partir d'un certain rang. Quant au deuxième terme, on a
$$\begin{aligned}\frac{1}{n}(\sum_{k=N+1}^{n} a_k) - l &= \frac{1}{n}((\sum_{k=N+1}^{n} a_k) - nl)\\ &= \frac{1}{n}(\sum_{k=N+1}^{n} (a_k - l)) - \frac{Nl}{n}.\end{aligned}$$
   Or pour tout $k \geq N+1$, on a $|a_k - l| \leq \varepsilon$. En majorant chacun des termes, on en déduit
$$|\frac{1}{n}(\sum_{k=N+1}^{n} a_k) - l| \leq \varepsilon + \frac{Nl}{n}.$$
   Encore une fois, à N fixé, la quantité $\frac{Nl}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On peut donc la majorer par ε pour n grand.
   En rassemblant toutes ces majorations, on obtient le résultat voulu. En effet, ayant fixé $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq M$, on a
$$|\frac{1}{n}(\sum_{k=0}^{n} a_k) - l| \leq 3\varepsilon.$$
   Ceci prouve la convergence demandée.

2. Supposons que $|\frac{b_{n+1}}{b_n}| \to l$ quand $n \to \infty$. Pour se ramener à la question précédente qui porte sur des sommes, l'idée naturelle est de considérer le logarithme de ce quotient. Par continuité, on a alors $\ln|\frac{b_{n+1}}{b_n}| \to \ln l$ quand $n \to \infty$ (si $l = 0$, on prend la convention $\ln l = -\infty$; de même si $l = +\infty$, on écrit $\ln l = +\infty$).
   Or $\ln|\frac{b_{n+1}}{b_n}| = \ln|b_{n+1}| - \ln|b_n|$. On a donc une série télescopique
   $$\sum_{k=0}^{n} \ln|\frac{b_{k+1}}{b_k}| = \sum_{k=0}^{n} (\ln|b_{k+1}| - \ln|b_k|) = \ln|b_{n+1}| - \ln|b_0|. \tag{2}$$
   On utilise alors la question précédente : puisque $\ln|\frac{b_{n+1}}{b_n}| \to l$, on a
   $$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \ln|\frac{b_{k+1}}{b_k}| \to \ln l$$
   quand $n \to \infty$. Donc, d'après l'équation **??**, on obtient
   $$\frac{1}{n}(\ln|b_{n+1}| - \ln|b_0|) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln l.$$
   Mais $\frac{\ln|b_0|}{n} \to 0$ quand $n \to \infty$, donc en fait $\frac{\ln|b_n|}{n} \to \ln l$. En appliquant l'exponentielle des deux côtés (qui est continue, donc préserve la limite) et le fait que $\frac{\ln|b_n|}{n} = \ln|b_n|^{\frac{1}{n}}$, on obtient le résultat recherché.
3. On applique les résultats précédents à $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Alors
   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (\frac{n}{n+1})^n = (1 - \frac{1}{n+1})^n$$
   Un développement limité montre que le terme de droite tend vers e. Le rayon de convergence est donc e^{-1}.

Exercice 23

Déterminer le rayon de convergence des séries suivantes, et étudier la convergence sur la frontière de leur disque de convergence.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$,
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n z^{3n}$,
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2(4^n + 3n)}$.
4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{\ln n}$.

Avertissement : certaines des séries présentées sont légèrement différentes de celles étudiées en classe. Les raisonnement sont cependant les mêmes !

Solution: L'étude de la convergence au bord est plus difficile pour les séries 1 et 4. On donne un résultat général sur ce genre de séries oscillantes ci-dessous.

1. On peut appliquer la règle de d'Alembert, prouvée dans l'exercice précédent : si R est le rayon de convergence, alors $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Le rayon de convergence est donc $R = 1$.
   Étudions la convergence sur le bord du disque. Si $z = 1$, on sait que la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge. Si z est un point du disque différent de 1, on écrit $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in]0; 2\pi[$. Nous allons montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge en utilisant une méthode de transformation d'Abel.
   En fait, on montre le résultat plus général suivant (parfois appelé « Théorème d'Abel »).

Théorème 0.1. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe, et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive, telles que*

1. *les sommes partielles $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ sont bornées par une constante indépendante de n, et*
2. *la suite (b_n) est décroissante et tend vers 0 quand $n \to \infty$.*

Alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ converge.

Ce théorème est utile quand on étudie des séries « oscillantes », il est bon d'avoir une idée de sa démonstration (voir ci-dessous). Ici, on prend par exemple $a_n = e^{in\theta}$ et $b_n = \frac{1}{n}$. Alors $A_n = \sum_{k=1}^n e^{ik\theta}$ est une série géométrique. Donc, pour tout n :

$$|A_n| = |e^{i\theta}\frac{1-e^{i(N+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}| \leq \frac{2}{|1-e^{i\theta}|},$$

qui est une constante indépendante de n. La suite b_n est positive, décroissante, et de limite nulle. On peut donc appliquer le théorème, qui prouve que $\sum_{k\geq 1}\frac{e^{in\theta}}{n}$ converge dès que $\theta \in]0; 2\pi[$. Par conséquent, la série entière considérée converge sur tous les points du bord de son disque de convergence, sauf en $z = 1$.

Preuve du Théorème **??**. La preuve repose sur une *transformation d'Abel*, qui est un analogue discret des intégrations par partie.

Lemme 0.2 (Transformation d'Abel)**.** *Soient $(a_n), (b_n)$ des suites complexes. On écrit $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Alors, pour tout $N \geq 1$,*

$$\sum_{n=0}^N a_n b_n = A_N b_N - \sum_{k=0}^{N-1} A_n(b_{n+1} - b_n).$$

Démonstration. Il s'agit d'une réécriture formelle de la suite. Notons que $a_n = A_n - A_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on définit $A_{-1} =: 0$ pour que l'égalité soit vérifiée en $n = 0$). Alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^N a_n b_n &= \sum_{n=0}^N (A_n - A_{n-1})b_n = \sum_{n=0}^N A_n b_n - \sum_{n=0}^N A_{n-1}b_n \\ &= \sum_{n=0}^N A_n b_n - \sum_{n=0}^{N-1} A_n b_{n+1} \\ &= A_N b_N - \sum_{k=0}^{N-1} A_n(b_{n+1} - b_n).\end{aligned}$$

□

Suite de la démonstration du théorème. On reprend les suites (a_n) et (b_n) données par l'énoncé du théorème. Alors, d'après le lemme

$$\sum_{n=0}^N a_n b_n = A_N b_N - \sum_{k=0}^{N-1} A_n(b_{n+1} - b_n). \tag{3}$$

Par hypothèse, il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $|A_n| \leq C$.Donc $|A_N b_N| \leq C b_N$, qui tend vers 0 quand $N \to \infty$, car b_N tend vers 0.

On étudie alors le terme général de la série de droite dans l'équation (**??**). Comme (b_n) est décroissante, on a $|b_{n+1} - b_n| = b_n - b_{n+1}$. Donc

$$|A_n(b_{n+1} - b_n)| \leq C(b_n - b_{n+1}). \tag{4}$$

Or $\sum_{n=0}^N (b_n - b_{n+1}) = b_0 - b_N$ par télescopage. Comme b_N converge quand $N \to \infty$, la série $\sum_{n\geq 0}(b_n - b_{n+1})$ est convergente. Par la comparaison donnée par l'inégalité (**??**), la série $\sum A_n(b_{n+1} - b_n)$ est absolument convergente.

En résumant, les deux termes de droite dans l'égalité (**??**) convergent quand $N \to \infty$. On en déduit que $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ est une série convergente. □

2. Si on écrit la série sous la forme $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, alors $a_{3n} = (2-\frac{1}{n})^n$ et $a_{3n+1} = a_{3n+2} = 0$. On ne peut donc pas utiliser le théorème de d'Alembert. Mais l'égalité $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ est toujours valable. Par définition

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} =: \inf_{n\geq 0}(\sup_{k\geq n} |a_k|^{\frac{1}{k}}) = \lim_{n\to\infty} |a_{3n}|^{\frac{1}{3n}}$$

car, dans notre cas, $\sup_{k\geq 3n} |a_k| = |a_{3n}|$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} |a_{3n}|^{\frac{1}{3n}} = \lim_{n\to\infty} (2-\frac{1}{n})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}.$$

Autrement dit, le rayon de convergence est $R = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Un autre moyen d'obtenir ce résultat est d'effectuer le changement de variable $w =: z^3$. Dans ce cas, les coefficients de la série $\sum_{n\geq 1}(2-\frac{1}{n})^n w^n$ sont tous non nuls, donc on peut calculer son rayon de convergence R' en prenant moins de précautions. L'exercice suivant permet ensuite de relier R et R' (on a $R = \sqrt[3]{R'}$).
La série diverge en tous ses points du bord. En effet, si $|z| = 2^{-\frac{1}{3}}$, alors

$$|(2-\frac{1}{n})^n z^{3n}| = (2-\frac{1}{n})^n \frac{1}{2^n} = (1-\frac{1}{2n})^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{1}{2}}.$$

En particulier, le terme général de la série $\sum_{n\geq 1}(2-\frac{1}{n})^n z^{3n}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini. Cette série ne peut donc pas être convergente.

3. On trouve le rayon de convergence en appliquant la règle de d'Alembert :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2}\frac{4^n+3n}{4^{n+1}+3(n+1)} = \frac{1}{4},$$

car $\frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$ et $4^n + 3n \sim 4^n$, quand $n \to \infty$. Le rayon de convergence est donc $R = 4$.
Soit z sur le bord du disque de convergence, c'est-à-dire $|z| = 4$. Alors

$$|\frac{z^n}{n^2(4^n+3n)}| = \frac{4^n}{n^2(4^n+3n)} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente. Par comparaison, la série $\sum \frac{n^2}{4^n+3n} z^n$ est donc absolument convergente. Cette série entière est donc convergente sur tous les points du bord de son disque de convergence.

4. On utilise encore une fois la règle de d'Alembert :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1) + \ln(\frac{n}{n+1})}{\ln(n+1)} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\frac{n}{n+1})}{\ln(n+1)} = 1$$

(cette égalité justifie rigoureusement l'affirmation $\ln n \sim \ln(n+1)$). Le rayon de convergence est donc $R = 1$.
Le comportement sur le bord du disque est le même que dans la question 1. Si $z = 1$, alors $\sum \frac{1}{\ln n}$ est une série de Bertrand divergente : cela peut être vérifié directement en écrivant $\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}$ (qui est vrai pour tout $n \geq 1$) et en utilisant un théorème de comparaison avec la série harmonique. Si $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0; 2\pi[$, on peut réutiliser le théorème **??** ci-dessus : dans ce cas $a_n = e^{in\theta}$ et $b_n = \frac{1}{\ln n}$. Les sommes partielles $A_n =: \sum_{k=2}^{n} a_k$ sont bornées par le même argument qu'en question 1 (série géométrique), et la suite b_n est bien décroissante, de limite nulle. On conclut que $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge pour tout $\theta \in]0; 2\pi[$. Par conséquent, la série entière converge en tous les points du bord, sauf en $z = 1$.

Exercice 24

1. Soit $f : z \mapsto \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $R(f)$. On fixe $k \in \mathbb{N}^*$ et on pose $g(z) = f(z^k)$, pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que g est une série entière et déterminer son rayon de convergence.
2. Soient f, g deux séries entières de rayons de convergence $R(f)$ et $R(g)$. Montrer que $R(f+g) \geq \min\{R(f), R(g)\}$.
3. Existe-t-il des séries entières f, g telles que les rayons de convergence de f et g soient 0, mais celui de $f+g$ est 1, respectivement $+\infty$?

Solution:

1. Par définition, on a $g(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^{kn}$ et la série converge pour tout z tel que $|z|^k < R(f)$, qui équivaut à $|z| < R(f)^{\frac{1}{k}}$. Ceci montre que $R(g) \geq R(f)^{\frac{1}{k}}$. Réciproquement, soit $z \in \mathbb{C}$ et $w =: z^k$. Si $|w|^{\frac{1}{k}} < R(g)$, alors $|z| < R(g)$, donc $\sum a_n z^{kn}$ converge. Par conséquent $\sum a_n w^n$ converge, ce qui prouve que $R(f) \geq R(g)^k$. En combinant les deux inégalités, on en déduit $R(f) = R(g)^k$.

Exercice 25

Soit Γ_r le cercle de centre 0 et de rayon r parcouru dans le sens direct. Soit f une fonction holomorphe sur un disque ouvert contenant le cercle de centre zéro et de rayon r. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\oint_{\Gamma_r} f(z)dz$,
2. $\displaystyle\oint_{\Gamma_r} \overline{f(z)}dz$, et
3. $\displaystyle\oint_{\Gamma_r} f(\overline{z})dz$.

Solution:

1. La fonction f est holomorphe sur un ouvert étoilé contenant Γ_r. D'après le théorème de Cauchy, on a donc $\oint_{\Gamma_r} f = 0$.
2. On utilise le développement en série entière de f : on écrit donc $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Comme f est holomorphe sur un ouvert qui contient le cercle de rayon r, le rayon de convergence de cette série est strictement plus grand que r. Par conséquent

$$\oint_{\Gamma_r} \overline{f(z)}dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} \oint_{\Gamma_r} \overline{z}^n dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} \int_0^{2\pi} r^n e^{-int} \times ire^{it} dt = i \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t} dt. \quad (5)$$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut calculer directement que

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt} dt = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq 0 \\ 2\pi \text{ sinon.} \end{cases}$$

Donc, dans l'équation (**??**), tous les termes apparaissant dans la somme sont nuls dès que $n \neq 1$. Par conséquent

$$\oint_{\Gamma_r} \overline{f(z)}dz = 2i\pi r^2 \overline{a_1} = 2i\pi r^2 \overline{f'(0)}.$$

3. On procède comme dans la question précédente :

$$\oint_{\Gamma_r} f(\overline{z})dz = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \oint_{\Gamma_r} \overline{z}^n dz = i \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t} dt.$$

Par le même argument, la plupart des termes de la somme s'annulent. Donc

$$\oint_{\Gamma_r} f(\overline{z})dz = 2i\pi r^2 a_1 = 2i\pi r^2 f'(0)$$

Exercice 26

Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ une série entière qui converge pour $|z| < 1$. On pose $m(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$, pour $0 \leq r < 1$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$ pour $0 \leq r < 1$.
2. Si de plus f est bornée dans $\mathbb{D}$, montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ et

$$m(r) = o\left(\frac{1}{\sqrt{1-r}}\right) \quad \text{quand } r \to 1^-.$$

TD 5 : Principe du maximum et théorème des zéros isolés

Exercice 27

1. Déterminer l'ensemble des fonctions f holomorphes sur le disque unité $\mathbb{D}$ telles que

$$f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n},$$

pour tout entier $n \geq 2$.
2. Que se passe-t-il si on remplace $\mathbb{D}$ par $\mathbb{D}^*$ dans la question précédente ?

Solution:

1. Soit $A = \left\{\frac{1}{n}, n \geq 2\right\}$. La fonction f coïncide avec la fonction holomorphe $z \mapsto z$ sur A. Or A possède un point d'accumulation en $0 \in \mathbb{D}$. D'après le théorème des zéros isolés, on a donc $f(z) = z$ sur $\mathbb{D}$ tout entier.
2. Si l'énoncé ne porte plus sur $\mathbb{D}$, mais sur $\mathbb{D}^*$, alors on ne peut plus utiliser le théorème des zéros isolés pour conclure. En effet, l'ensemble A ne possède pas de point d'accumulation dans $\mathbb{D}^*$ (son seul point d'accumulation dans $\mathbb{C}$ est 0, et ce point n'est pas dans $\mathbb{D}^*$). En fait, il y a une infinité de fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}^*$ qui vérifient la condition de l'énoncé. Par exemple, la fonction $g : z \mapsto e^{\frac{2i\pi}{z}} - 1$ est holomorphe sur $\mathbb{D}^*$ et s'annule en tous les points de A. Par conséquent, les fonctions $f_1 : z \mapsto z$ et $f_2 : z \mapsto z + g(z)$ sont distinctes et vérifient toutes deux les conditions de l'énoncé.

Exercice 28

1. Déterminer toutes les fonctions f holomorphes sur $\mathbb{C}$ telles que $f(z+1) = f(z+i) = f(z)$, pour tout $z \in \mathbb{C}$.
2. Déterminer toutes les fonctions qui sont à la fois Lipschitziennes et holomorphes sur $\mathbb{C}$.

Solution:

1. Soit C le carré défini par

$$C = \{z \in \mathbb{C}, 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1 \,\mathrm{et}\, 0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 1\}.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un $z' \in C$ tel que $f(z) = f(z')$. En effet, il suffit de prendre

$$z' = z - \lfloor \mathrm{Re}(z) \rfloor - i \lfloor \mathrm{Im}(z) \rfloor.$$

Puisque $f(z+n) = f(z)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a bien $f(z - \lfloor \mathrm{Re}(z) \rfloor) = f(z)$. Par le même argument pour la partie imaginaire, on en déduit $f(z') = f(z)$. Or f est continue, donc bornée sur C (car C est un compact de $\mathbb{C}$). Par conséquent f est bornée sur $\mathbb{C}$ tout entier, avec $\|f\|_\infty = \max_C |f|$. Le théorème de Liouville implique alors que f est une fonction constante. Réciproquement, toute fonction constante vérifie les conditions de l'énoncé.

2. Soit f une fonction holomorphe et L-Lipschitzienne, c'est-à-dire telle que $|f(z)-f(h)| \leq |z-h|$, pour tout $z, h \in \mathbb{C}$. Alors
$$|f'(z)| = \lim_{h\to z} |\frac{f(z)-f(h)}{z-h}| \leq L,$$
pour tout $z \in \mathbb{C}$. Comme f est holomorphe, la fonction f' est également holomorphe sur $\mathbb{C}$ (une façon de voir ça est de dire que f' est développable en série entière). D'après le théorème de Liouville, la fonction f' est donc constante. Par conséquent, toutes les dérivées supérieures $f^{(n)}$ sont nulles, pour tout $n \geq 2$. Donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a
$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0) + f'(0)z.$$
Autrement dit, f est un polynôme de degré 1. Réciproquement, tout polynôme de degré 1 sur $\mathbb{C}$ vérifie les conditions de l'énoncé.

Exercice 29

Soit f une fonction entière non nulle, et $M(r) =: \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Montrer que f est un polynôme si, et seulement si, il existe $C \geq 0$ tel que
$$\frac{\log M(r)}{\log r} \leq C, \tag{6}$$
pour tout $r \geq 2$. Calculer dans ce cas le degré du polynôme.

Solution: Supposons d'abord que f est un polynôme d'ordre d, c'est à dire que $f(z) = \sum_{n=0}^{d} a_n z^n$, pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors, pour $r \geq 2$, on a
$$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)| \leq \sum_{n=0}^{d} |a_n| r^n \leq r^d \sum_{n=0}^{d} |a_n|.$$
Par conséquent
$$\frac{\ln M(r)}{\ln r} = \frac{\ln(\sum_{n=0}^{d} |a_n|)}{\ln r} + \frac{d \ln r}{\ln r} \leq d + \frac{1}{\ln 2} \ln(\sum_{n=0}^{d} |a_n|).$$
Donc, si f est un polynôme, alors la condition (6) de l'énoncé est vérifiée. De plus, on remarque que le degré du polynôme est alors donné par $d = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln M(r)}{\ln r}$.

Réciproquement, soit f une fonction entière non-nulle vérifiant la condition (6). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les inégalités de Cauchy donnent une majoration de $f^{(n)}(0)$, à savoir
$$\frac{|f^{(n)}|}{n!} \leq \frac{M(r)}{r^n},$$
pour tout $r > 0$. Supposons $f^{(n)}(0) \neq 0$. Alors, pour tout $r \geq 2$, on a
$$\begin{aligned} \ln(\frac{|f^{(n)}|}{n!}) &\leq \ln(M(r)) - n \ln r \\ &\leq (C-n) \ln r, \end{aligned}$$
l'inégalité de la deuxième ligne suivant de la condition (6). Si $n > C$, le terme de droite dans l'inégalité tend vers $-\infty$ quand r tend vers $+\infty$, alors que le terme de gauche est constant. On aboutit dans ce cas à une contradiction, donc les termes $f^{(n)}(0)$ sont nuls dès lors que $n > C$. En écrivant le développement en série entière de f en 0, on a alors
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\lfloor C \rfloor} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$
Autrement dit, si f vérifie la condition (6), alors f est un polynôme de degré inférieur ou égal à C.

Exercice 30

1. Existe-t-il une fonction f holomorphe sur le disque unité telle que

$$f(\frac{1}{2n}) = f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n},$$

pour tout entier $n \geq 2$?

2. Soit Ω un ouvert qui contient 0, et soit f une fonction holomorphe sur Ω telle que

$$f(\frac{1}{n}) + f''(\frac{1}{n}) = 0,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} \in \Omega$. Déterminer f, et montrer qu'il existe une unique fonction entière g telle que $g|_\Omega = f$.

Solution:

1. L'égalité $f(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{n}$ implique que f coïncide avec la fonction holomorphe $g_1 : z \mapsto 2z$ sur l'ensemble $F_1 = \left\{\frac{1}{2n}, n \geq 2\right\}$. Cet ensemble a un point d'accumulation en 0, donc, d'après le théorème des zéros isolés, on doit avoir $f = g$ sur tout $\mathbb{D}$.

   Mais la seconde égalité $f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n}$ indique que f coïncide aussi avec la fonction holomorphe $g_2 : z \mapsto \frac{z}{1-z}$ sur l'ensemble $F_2 = \left\{\frac{1}{2n+1}, n \geq 2\right\}$. Par le même argument, on doit donc avoir $f = g_2$ sur $\mathbb{D}$. Or $g_1 \neq g_2$ sur $\mathbb{D}$, on aboutit donc à une contradiction. Il n'existe par conséquent pas de telle fonction f.

2. Si f est holomorphe sur Ω, alors la fonction $f + f''$ l'est aussi. Or l'ensemble $\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\} \cap \Omega$ possède un point d'accumulation dans Ω. Par le théorème des zéros isolés, on doit donc avoir

$$f(z) + f''(z) = 0,$$

   pour tout $z \in \Omega$.

   L'équation est en particulier vérifiée sur $\Omega \cap \mathbb{R}$, qui est un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ puisque $0 \in \Omega$. Autrement dit,

$$f(x) + f''(x) = 0,$$

   pour tout $x \in \mathbb{R} \cap \Omega$. C'est une équation linéaire d'ordre 2, à coefficients constants. Par conséquent, il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$, pour tout $x \in \Omega \cap \mathbb{R}$. Il existe au moins une fonction f holomorphe sur Ω qui prend ces valeurs sur $\Omega \cap \mathbb{R}$: c'est la fonction

$$f : z \mapsto a\cos(z) + b\sin(z). \tag{7}$$

   Comme l'ensemble $\Omega \cap \mathbb{R}$ n'est pas discret dans Ω, le théorème des zéros isolés assure que f est l'unique fonction holomorphe sur Ω telle que $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ sur $\Omega \cap \mathbb{R}$. Par conséquent, les fonctions qui vérifient les conditions de l'énoncé sont celles qui s'écrivent comme dans l'équation (**??**) sur Ω.

Exercice 31

1. *(Lemme de Schwarz)* Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$. Montrer que $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

   Indication : considérer la fonction $g : z \mapsto \frac{f(z)}{z}$, étendue par continuité en 0.

2. Sous les hypothèses de la question précédente, on suppose qu'il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$. Que peut-on dire sur f ?

3. Déterminer toutes les fonctions holomorphes $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ telles que $f(0) = 0$ et $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

Solution:

1. La fonction f est holomorphe, donc développable en série entière en 0. Puisque $f(0) = 0$, le premier terme de la série entière est nul. On a donc
$$f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n z^n = z \sum_{n\geq 0} a_{n+1} z^n,$$
pour tout $z \in \mathbb{D}$. La fonction $g : z \mapsto \frac{f(z)}{z}$ est donc donnée par la série entière $g(z) = \sum_{n\geq 0} a_{n+1} z^n$, qui converge pour tout $z \in \mathbb{D}$. Par conséquent, la fonction g est holomorphe sur $\mathbb{D}$.
Soit $z \in \mathbb{D}$ et r tel que $|z| < r < 1$. D'après le principe du maximum, on a
$$g(z) \leq \max_{|h|=r} |g(h)| = \max_{|h|=r} \frac{|f(h)|}{|h|} \leq \frac{1}{r}.$$
On a utilisé le fait que $|f(h)| \leq 1$ pour tout $h \in \mathbb{D}$. En faisant tendre r vers 1, on obtient alors $|g(z)| \leq 1$, soit $|f(z)| \leq |z|$.
2. Supposons qu'il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$. Alors $|g(z_0)| = 1$. Mais $|g(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, donc z_0 est un maximum local de g. D'après le principe du maximum, la fonction g est alors constante sur $\mathbb{D}$, égale à $g(z_0)$. Par conséquent, la fonction f est de la forme $f : z \mapsto az$, avec $|a| = 1$.
3. On applique la question précédente avec $z_0 = \frac{1}{2}$. On en déduit qu'il existe $a \in S^1$ tel que $f(z) = az$, pour tout $z \in \mathbb{D}$. En utilisant à nouveau l'égalité $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, on conclut que $a = 1$. La fonction f est donc l'identité sur $\mathbb{D}$.

Exercice 32

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P_1, \dots, P_n$ des points du plan. Soit M un point du plan et f la fonction définie par le produit des distances
$$f(M) =: \prod_{j=1}^{n} MP_j.$$
Montrer que les seuls extrema locaux de la fonction f sont les points P_j, pour $j \in \mathbb{N}$.

Solution: Soit z_j la coordonnée complexe du point P_j, pour $j = 1, \dots, n$. On pose également z la coordonnée du point M. Alors
$$f(M) = \prod_{j=1}^{n} |z - z_j| = |\prod_{j=1}^{n} (z - z_j)|.$$
Soit g la fonction entière définie par $g : z \mapsto \prod_{j=1}^{n} (z - z_j)$. D'après le principe du maximum, la fonction g n'admet pas de maximum local sur $\mathbb{C}$ (car elle n'est pas constante) ; donc f n'admet pas non plus de maximum local sur $\mathbb{C}$.

Pour étudier les minimum locaux, on considère la fonction $h : z \mapsto \frac{1}{g(z)}$. La fonction h est holomorphe sur le domaine $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$, et elle n'est pas constante (car g n'est pas constante), donc elle n'admet pas de maximum local sur Ω. Par conséquent f n'admet pas de minimum local sur Ω.

TD 6 : Développement en séries de Laurent et formule des résidus

Exercice 33

Soit $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2} + \dfrac{2}{z-2i}$.

1. Donner le développement en série entière de f en 0. Quel est le rayon de convergence ?
2. Déterminer le résidu de f au point $2i$, puis au point 1.
3. Déterminer le développement en série de Laurent de f sur la couronne $1 < |z| < 2$.

Solution:

1. La fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1; 2i\}$: son développement en série entière en 0 a donc pour rayon de convergence 1. On écrit

$$\frac{1}{z-2i} = -\frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{1-\frac{z}{2i}}\Big) = -\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z}{2i}\Big)^n,$$

pour tout z tel que $|\frac{z}{2i}| < 1$, c'est-à-dire $|z| < 2$. D'autre part :

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{1}{1-z}\Big) = \frac{\partial}{\partial z}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1},$$

pour tout $|z| < 1$. En rassemblant ces deux parties, on obtient, pour tout $|z| < 1$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(n + 1 - \frac{2}{(2i)^{n+1}}\Big)z^n.$$

2. Le résidu est additif, donc

$$\mathrm{Res}_{2i}(f) = \mathrm{Res}_{2i}\Big(\frac{1}{(1-z)^2}\Big) + \mathrm{Res}_{2i}\Big(\frac{2}{z-2i}\Big).$$

Mais $z \mapsto \frac{1}{(1-z)^2}$ est holomorphe au voisinage de $2i$, donc son résidu en $2i$ est nul. La fonction $z \mapsto \frac{2}{z-2i}$ est déjà sous forme d'un développement en série de Laurent (à un seul terme), donc son résidu peut être identifié directement : il est égal à 2. Par conséquent, $\mathrm{Res}_{2i}(f) = 2$.
Un raisonnement similaire en 1 donne $\mathrm{Res}_1(f) = 0$.

3. On a vu à la première question que

$$\frac{1}{z-2i} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(2i)^{n+1}},$$

pour tout $|z| < 2$. De plus, pour tout $|z| > 1$, on a $|\frac{1}{z}| < 1$, donc

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+1)}.$$

Par conséquent, pour tout $|z| > 1$:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{1-z}) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^{-n-2} = -\sum_{k=-\infty}^{-2}(k+1)z^k,$$

où l'on a effectué le changement de variable $k =: -n-2$. Le développement en série de Laurent sur la couronne $1 < |z| < 2$ est donc

$$f(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-2}(n+1)z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(2i)^{n+1}}.$$

Exercice 34

1. Soit $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{(z-2)^3}$. Déterminer le résidu de f en 2.
2. Soit $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2+4}$. Déterminer le résidu de f en $2i$, puis donner le développement en série de Laurent de f au point $2i$.
3. Soit $f(z) = \dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z+i)(z-i)}$. Déterminer le résidu de f en i, puis donner le développement en série de Laurent de f dans la couronne $1 < |z| < 2$.

Solution:

1. On développe f en série de Laurent au point 2. Pour ça, on développe le numérateur en série entière en 2. Posons $g : z \mapsto e^{z^2}$, qui est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Alors
$$e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(2)}{n!}(z-2)^n.$$
Le développement en série de Laurent est donc
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(2)}{n!}(z-2)^{n-3}.$$
Le résidu est le coefficient devant $(z-2)^{-1}$, donc $\mathrm{Res}_2 f = \frac{g''(2)}{2}$. On calcule $g'(z) = 2ze^{z^2}$, puis $g''(z) = 2(z^2+1)e^{z^2}$. Par conséquent $\mathrm{Res}_2 f = 5e^4$.
2. On écrit
$$f(z) = \frac{\sin z}{(z+2i)(z-2i)} = \frac{g(z)}{z-2i}.$$
La fonction g est holomorphe au voisinage de $2i$: dans ce cas, on a directement $\mathrm{Res}_{2i} f = g(2i)$. En effet, développer g en série entière au point $2i$ donne le développement de f en série de Laurent :
$$f(z) = \frac{g(z)}{z-2i} = \frac{1}{z-2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(2i)}{n!}(z-2i)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(2i)}{n!}(z-2i)^{n-1}.$$
Le terme devant $(z-2i)^{-1}$ est obtenu en $n=0$, d'où $\mathrm{Res}_{2i} f = g(2i) = \frac{\sin(2i)}{4i}$.
3. Par le même raisonnement que celui de la question précédente :
$$\mathrm{Res}_i f = \frac{i^2-2i+5}{(i-2)(i+i)} = i.$$

Pour obtenir le développement en série de Laurent, on commence par décomposer la fracion en élément simples :

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{i}{z+i} + \frac{i}{z-i}.$$

Notez que les coefficients devant chaque élément simple sont exactement les résidus de f en les pôles correspondants. Comme dans le premier exercice, on écrit

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n,$$

pour tout $|z| < 2$, puis

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{i}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{i}{z})^n \quad \text{et} \quad \frac{1}{z+i} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-(\frac{-i}{z})} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-i}{z})^n,$$

pour tout $|z| > 1$ (alors $|\frac{i}{z}| < 1$). Après changement de variable, le développement en série de Laurent de f est donc

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1}(i^{-n} + (-i)^{-n})z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

Exercice 35

Déterminer les singularités isolées des fonctions suivantes, et calculer les résidus en chacune de ces singularités.

1. $f(z) = \dfrac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$,
2. $g(z) = \exp(-\dfrac{1}{z^4})$

Exercice 36

Calculer les intégrales suivantes (tous les cercles sont parcourus dans le sens direct) :

1. $\displaystyle\oint_{|z-1|=1} \frac{z}{z^4-1}dz$,
2. $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z(z-1)^3}$,
3. $\displaystyle\oint_{|z-i|=2} \frac{\sin z}{(z-i)^4}dz$,
4. $\displaystyle\oint_{|z|=2} z^2\exp(\frac{z+1}{z-1})dz$.

Solution:

1. La fonction $f : z \mapsto \frac{z}{z^4-1}$ a quatre pôles : $1, -1, i$ et $-i$. Le contour d'intégration n'entoure qu'un seul de ces pôles : le point -1. On tourne une fois autour de 1 dans le sens direct, donc d'après la formule des résidus :

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{z}{z^4-1}dz = 2i\pi \mathrm{Res}_1 f.$$

La fonction f s'écrit

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-i)(z+i)(z-1)} = \frac{g(z)}{(z-1)},$$

avec g une fonction holomorphe sur un voisinage de 1. Par un résultat du cours, on le raisonnement de l'exercice 2, question 2, cela suffit à déterminer $\mathrm{Res}_1 f = g(1) = \frac{1}{4}$. Par conséquent

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{z}{z^4-1}dz = \frac{i\pi}{2}.$$

2. La fonction $f : z \mapsto \frac{1}{z(z-1)^3}$ a deux pôles, en 0 et 1. Le contour d'intégration tourne une fois dans le sens direct autour de ces deux pôles, donc

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z(z-1)^3} = 2i\pi(\mathrm{Res}_0 f + \mathrm{Res}_1 f).$$

Une façon d'indentifier ces résidus est d'effectuer la décomposition de f en élément simples, et de calculer les coefficients qui apparaissent devan $\frac{1}{z}$ et $\frac{1}{z-1}$. On préfère ici utiliser la méthode suivante, plus générale.

La fonction f s'écrit $f(z) = \frac{g(z)}{z}$ avec $g : z \mapsto \frac{1}{(z-1)^3}$ holomorphe au voisinage de 0. Donc $\mathrm{Res}_0 f = g(0) = -1$. De même, on écrit $f(z) = \frac{h(z)}{(z-1)^3}$, avec $h : z \mapsto \frac{1}{z}$ qui est holomorphe au voisinage de 1. La fonction h est donc développable en série entière en 1, ce qui permet d'obtenir le développement en série de Laurent de f au voisinage de ce point :

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^{n-3}.$$

Le résidu de f en 1 est le coefficient devant $(z-1)^{-1}$ de cette série, donc en $n = 2$. Par conséquent $\mathrm{Res}_1 f = \frac{h''(1)}{2} = 1$.

On en déduit que

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z(z-1)^3} = 0.$$

3. La fonction $f : z \mapsto \frac{\sin z}{(z-i)^4}$ n'a qu'un seul pôle, au point i. Le contour d'intégration tourne une fois autour de ce pôle dans le sens direct, donc

$$\oint_{|z-i|=2} \frac{\sin z}{(z-i)^4} dz = 2i\pi \mathrm{Res}_i f.$$

On calcule ce résidu avec le même raisonnement que dans les exercices précédents, en développant le numérateur en série entière au point i. On écrit donc

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^{(n)}(i)}{n!}(z-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^{(n)}(i)}{n!}(z-i)^{n-4}.$$

Le résidu de f en i est obtenu en $n = 3$, soit $\mathrm{Res}_i f = \frac{\sin^{(3)}(i)}{6}$. Par conséquent

$$\oint_{|z-i|=2} \frac{\sin z}{(z-i)^4} dz = -\frac{i\pi \cos(i)}{3}.$$

(On rappelle que les relations $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$ restent valables sur $\mathbb{C}$).

Exercice 37

En intégrant le long de la frontière du domaine $D_R =: \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z| < R, 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}\}$, montrer que

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n}(\sin(\frac{\pi}{n}))^{-1}.$$

Exercice 38

Calculer les intégrales suivantes à l'aide du théorème des résidus :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$.

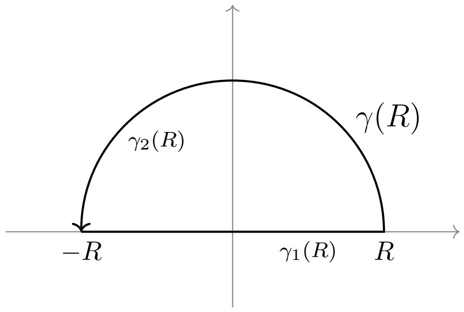
2. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{5x+2}{3x^2-x+1}dx$, pour $a \in \mathbb{R}$,

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(3x^2+2x+1)^2}dx$

4. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos x}{5+\cos x}dx$,

Solution:

1. On considère la fonction méromorphe $f : z \mapsto \frac{1}{z^2+z+1}$, qui a deux poles simples : $\alpha_\pm = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. On choisit le contour d'intégration $\gamma(R)$ suivant :



Le contour est choisi tel que
$$\int_{\gamma_1(R)} f \to \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}.$$
D'autre part
$$\int_{\gamma_2(R)} f = \int_0^\pi \frac{iRe^{it}}{R^2e^{2it}+Re^{it}+1}dt.$$
Par inégalité triangulaire $|R^2e^{2it}+Re^{it}+1| \geq R^2-R-1$, donc
$$|\int_{\gamma_2(R)} f| \leq \int_0^\pi \frac{R}{R^2-R-1}dt,$$
qui tend vers 0 quand $R \to \infty$. Par conséquent
$$\oint_{\gamma(R)} f \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}.$$
Mais l'intégrale de gauche peut être évaluée par la formule des résidus, donc
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1} = 2i\pi \mathrm{Res}_{\alpha_+} f.$$
Comme f est de la forme $f(z) = \frac{g(z)}{z-\alpha_+}$ avec $g(z) = \frac{1}{z-\alpha_-}$ holomorphe près de α_+, le résidu est donné par $g(\alpha_+) = \frac{1}{i\sqrt{3}}$. Finalement :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

2.

3. On considère la fonction $f : z \mapsto \frac{e^{iz}}{(3z^2+2z+1)^2}$ (la fonction exponentielle au numérateur est plus facile à majorer qu'un sinus). La fonction f est méromorphe avec deux pôles doubles, donnés par
$$\alpha_\pm = \frac{-1\pm i\sqrt{2}}{3}$$

On choisit le même contour d'intégration $\gamma(R)$ que pour la question précédente. Alors

$$\int_{\gamma_1(R)} f \to \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(3x^2+2x+1)^2}dx.$$

En ce qui concerne l'intégrale sur $\gamma_2(R)$, on observe que $|e^{Re^{it}}| = e^{-R\sin t} < 1$ quand $t \in [0,\pi]$. De plus, l'inégalité triangulaire donne $|3R^2e^{2it} + 2Re^{it} + 1| \geq 3R^2 - 2R - 1$. Pour $R > 1$, on a donc

$$\int_{\gamma_2(R)} f = \int_0^{\pi} \frac{iRe^{it}e^{iRe^{it}}}{(3R^2e^{2it}+2Re^{it}+1)^2}dt \leq \int_0^{\pi} \frac{R}{(3R^2-2R-1)^2}dt,$$

qui tend vers 0 quand $R \to \infty$. Par conséquent :

$$\oint_{\gamma(R)} f \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(3x^2+2x+1)^2}.$$

Mais la formule des résidus permet d'évaluer l'intégrale de gauche :

$$\oint_{\gamma(R)} f = 2i\pi \mathrm{Res}_{\alpha_+} f.$$

Il faut donc calculer ce résidu. Pour ça, on écrit $f(z) = \frac{g(z)}{(z-\alpha_+)^2}$, avec $g(z) = \frac{e^{iz}}{9(z-\alpha_-)^2}$. Le résidu est alors

$$g'(\alpha_+) = \frac{1}{9}\frac{ie^{i\alpha_+}(\alpha_+-\alpha_-)^2 - 2(\alpha_+-\alpha_-)e^{i\alpha_+}}{(\alpha_+-\alpha_-)^4} = e^{-\frac{i+\sqrt{2}}{3}}\frac{3+\sqrt{2}}{8i\sqrt{2}}$$

Finalement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(3x^2+2x+1)^2} = \mathrm{Im}(2i\pi\mathrm{Res}_{\alpha_+} f) = \frac{\pi(3+\sqrt{2})}{4}e^{-\frac{\sqrt{2}}{3}}\sin(\frac{1}{3}).$$

Exercice 39

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{e^z + e^{\frac{1}{z}}}{z(z-1)}dz.$

Université de Lorraine
Analyse Complexe

TD 7 : Révisions

Questions tirées d'examens d'Analyse Complexe passés.

1. Calculer, à l'aide du théorème des résidus

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(z-1)^2} dz,$$

où γ est le chemin donné par $\gamma(t) = 4\cos t + 5i \sin t$, avec $t \in [0, 2\pi]$.

2. Soit $a \in \mathbb{C}$ et γ le chemin donné par $\gamma(t) = e^{it}$, pour $0 \leq t \leq 2\pi$. Montrer que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{a^n e^{az}}{n! z^{n+1}} dz = \left(\frac{a^n}{n!} \right)^2.$$

3. Montrer que la fonction $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(nz)}{2^n}$ est holomorphe sur $D = \{x + iy \in \mathbb{C}, |y| < \ln 2\}$.

4. Soit f une fonction analytique dans le disque $|z| < R$. On suppose qu'il existe un $M > 0$ tel que $|f'(z)| \leq M$, pour tout $|z| < R$. Si $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est le développement en série entière de f, démontrer que l'on a

$$|a_n| \leq \frac{M}{nR^{n-1}}.$$

5. Existe-t-il une fonction entière f telle que $f(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n+1}) = e^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?

6. Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos t + \sqrt{5}}. \tag{8}$$